**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»**

**(КНИТУ-КАИ)**

***Л.Е. Нестерова, И.В. Матвеев***

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Учебное пособие*

Казань 2020

УДК [517.9+517.2/3]

|  |  |
| --- | --- |
| Рецензенты: | Кафедра Интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами (ФГБОУ ВО КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  Кислов Д.М. заместитель главного конструктора по авиационному оборудованию ОП№2 в г. Казани АО «УЗГА» |

В основу учебного пособия положен курс лекций, читаемых студентам по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» в рамках дисциплины «Дифференциальные уравнения» в ИКТЗИ КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева. Содержание пособия соответствует рабочей программе по дисциплине «Дифференциальные уравнения» Б1.В.06. Учебное пособие состоит из шести глав, предназначено для изучения основных методов составления, решения, анализа дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, и их применения при реализации исследований эволюционных процессов в различных областях знаний, а также в пособии рассмотрены линейные и квазилинейные уравнения в частных производных, методы их решения и общие вопросы теории устойчивости. Изложение теоретического материала сопровождается подробными примерами решения задач, иллюстрирующими рассмотренные в пособии методы и задачами для самостоятельного решения. В конце каждой главы приведен список вопросов для самоконтроля.

Учебное пособие может быть использовано для самостоятельной подготовки студентами всех форм обучения по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», а также по тем направлениям бакалавриата, в программу которых входит изучение составления, решения, анализа дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Табл. 1. Ил. 6. Библиогр.: 8 назв.

Нестерова Л.Е., Дифференциальные уравнения: учебное пособие/Л.Е. Нестерова, И.В. Матвеев. – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2020. - 144 с.

Оглавление

[ВВЕДЕНИЕ 5](#_Toc44445483)

[ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 13](#_Toc44445484)

[ПЕРВОГО ПОРЯДКА 13](#_Toc44445485)

[Основные понятия и определения 13](#_Toc44445486)

[Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Метод изоклин. 14](#_Toc44445487)

[Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными 20](#_Toc44445488)

[Дифференциальные уравнения, однородные относительно *х*, *у* и приводящиеся к ним 23](#_Toc44445489)

[Обобщенные однородные дифференциальные уравнения. 26](#_Toc44445490)

[Линейные уравнения 1-го порядка и приводящие к ним 27](#_Toc44445491)

[Уравнения в полных дифференциалах 34](#_Toc44445492)

[Уравнения 1-го порядка *n*-степени, не разрешенные относительно производной 39](#_Toc44445493)

[Задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка 45](#_Toc44445494)

[Особые точки. Особые решения 51](#_Toc44445495)

[Метод Пикара 52](#_Toc44445496)

[Численные методы решения задачи Коши 55](#_Toc44445497)

[Контрольные вопросы 58](#_Toc44445498)

[ГЛАВА 2. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 62](#_Toc44445499)

[Уравнения высшего порядка. Общие сведения 62](#_Toc44445500)

[Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка 63](#_Toc44445501)

[Контрольные вопросы 66](#_Toc44445502)

[ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ 68](#_Toc44445503)

[Основные понятия и определения 68](#_Toc44445504)

[Линейные однородные дифференциальные уравнения. Свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений 69](#_Toc44445505)

[Линейная зависимость функций 70](#_Toc44445506)

[Определитель Вронского его применения 70](#_Toc44445507)

[Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения 73](#_Toc44445508)

[Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 75](#_Toc44445509)

[Свойства решений линейного неоднородного дифференциального уравнения 78](#_Toc44445511)

[Интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения методом вариации постоянных 79](#_Toc44445512)

[Линейные однородные дифференциальные уравнения*n*-порядка 82](#_Toc44445513)

[с постоянными коэффициентами 82](#_Toc44445514)

[Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n* -го порядка 87](#_Toc44445515)

[с постоянными коэффициентами 87](#_Toc44445516)

[Контрольные вопросы 90](#_Toc44445517)

[ГЛАВА 4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 93](#_Toc44445518)

[Основные понятия и определения 93](#_Toc44445519)

[Интегрирование нормальных систем дифференциальных уравнений методом исключения неизвестных 96](#_Toc44445520)

[Линейные системы дифференциальных уравнений 98](#_Toc44445521)

[Свойства решений линейных однородных систем дифференциальных уравнений 98](#_Toc44445522)

[Фундаментальная система решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений 100](#_Toc44445523)

[Теорема о структуре общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений 102](#_Toc44445524)

[Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений 104](#_Toc44445525)

[Интегрирование линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений методом вариации постоянных 106](#_Toc44445526)

[Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений 108](#_Toc44445527)

[с постоянными коэффициентами 108](#_Toc44445528)

[Контрольные вопросы 112](#_Toc44445529)

[ГЛАВА 5. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 114](#_Toc44445530)

[Уравнения в частных производных первого порядка 114](#_Toc44445531)

[Задачи для самостоятельного решения. 121](#_Toc44445532)

[ГЛАВА 6. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ 125](#_Toc44445533)

[Теория устойчивости. Основные понятия 125](#_Toc44445534)

[Второй метод А. М. Ляпунова 129](#_Toc44445535)

[Задачи для самостоятельного исследования. 136](#_Toc44445536)

[Исследование на устойчивость по первому приближению 136](#_Toc44445537)

[СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 144](#_Toc44445538)

# ВВЕДЕНИЕ

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда (а точнее говоря крайне редко) удается непосредственно установить прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Однако в большинстве случаев можно установить связь между этими величинами и скоростями их изменения относительно других независимых переменных, Другими словами, найти уравнения, в которых неизвестные функции входят вместе со своими производными. Это и есть “Дифференциальные Уравнения” (ДУ).

Задачи, приводящиеся к ДУ, появились в области математического естествознания, например, в проблеме падения тяжелого тела в среде без сопротивления, которую решил Галилей (1638 г.) и в оптике открытие закона преломления света позволило Р.Декарту (1628 г.) поставить и решить первую из так называемых «обратных задач на касательные».

«Обратные задачи на касательные», т. е. задачи об определении кривых, касательные к которым обладают заданными свойствами, сыграло важную роль в предыстории интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений (ТДУ). Несколько таких задач были решены Декартом (1638 г.) путем преобразования координат. Он не располагал понятием логарифмической функции). Поэтому специальным кинематическим приемом, определял точки искомой кривой как точки пересечения двух движущихся прямых. Причем Декарт высказал при этом убеждение, что общего метода решения подобных задач существовать не может. Однако, уже в 1669-1670гг решение тех обратных задач на касательные, дифференциальные уравнения которых непосредственно допускают разделение переменных, было сведено к квадратурам.

Первый период истории ДУ, охватывающий последнюю четверть 17-го и весь 18-й век, начинается с работ и Ньютона и Лейбница. Изучение проблем движения точки и твердого тела методами дифференциального и интегрального исчисления привело к выделению простейших классов однородных ДУ первого и второго порядков.

Подобно тому, как математический анализ в 18 веке развивался как анализ отдельных классов функций, так и ТДУ разрабатывалась как учение о различных конкретных типах дифференциальных уравнений.

Главные усилия были сосредоточены на частных методах интегрирования и на сведении к элементарным функциям и их квадратурам. При невозможности такого решения, оно заменялось приближенным интегрированием.

В стороне оставались такие проблемы, как вопросы существования, поведения интегральных кривых, природы особых точек.

При этом, как и ряд других дисциплин, ТДУ развивалась первоначально внутри математического анализа и лишь по мере выяснения особенностей её проблем и центральных понятий, выделилась в особую математическую науку.

Ряд ДУ был проинтегрирован Ньютоном в «Математических началах натуральной философии» (1686г), второй закон которых, как известно, имеет вид

Но в «Математических началах натуральной философии» отсутствовала запись ДУ и их интегралов в аналитической форме. Чисто аналитическую трактовку задач механики ввел впервые Л.Эйлер.

Термин «Дифференциальное уравнение» ввел Лейбниц. Он и братья Яков и Иоганн Бернулли направили усилия на приведение ДУ первого порядка к виду ДУ с разделяющимися переменными. Так, ими было решено уравнение, предложенное старшим Бернулли:

Не остался в долгу и младший Бернулли, поместивший в июньском номере **Actа eroditorum** следующее письмо:

“Остроумнейших математиков всего мира приветствую я, И.Бернулли! Людей высокого ума нельзя привлечь к работе ничем более, как указав им трудную и вместе с тем полезную задачу, решением которой возможно и славу приобрести и оставить по себе вечный памятник. Я надеюсь, что заслужу благодарность всего ученого мира, если я по примеру Паскаля, Ферма и других предложу лучшим математикам нашего времени задачу, которая даст им возможность испробовать, хороши ли те методы, которыми они владеют, и как велика сила их ума. Если кто-нибудь найдет решение предложенной задачи и сообщит об этом мне, то я объявлю ему публично заслуженную хвалу”.

Вскоре были даны 3 решения (1-Яков Бернулли, 2-Лопиталь, 3- появилось в английском журнале без подписи, но Иоганн Бернулли узнал по «львиным когтям» Ньютона.)

Новые идеи в ТДУ были внесены в начале 19 века в связи с реформой математического анализа. В этот переломный для математики период коренной перестройке подвергся самый фундамент математического анализа. Были точно сформулированы понятия предела, бесконечно малой, непрерывной функции, дифференциала; определенный интеграл, под которым обычно понимали частное значение одной из первообразных, был определен как предел суммы; при пользовании бесконечными рядами стали требовать их сходимости, были установлены критерии их сходимости. В результате этой реформы (Коши, Гаусс, Больцано) на передний план выдвигается проблема существования объектов анализа (определяемых с помощью бесконечных процессов), таких как пределов последовательностей, определенного интеграла непрерывной функции, различных несобственных интегралов, корня непрерывной функции на концах интервала имеющей разные знаки.

Там, где ученые 18 века опирались на геометрические иллюстрации или физические аналогии (интеграл как площадь, производную как наклон касательной), или на очевидное из хода выкладок, математики 19 века усмотрели принципиальные проблемы существования.

Новые идеи и методы математического анализа оказали мощное влияние на развитие ТДУ. Здесь также была поставлена общая проблема существования, а именно существования решений дифференциальных уравнений.

Точная формулировка и первое решение этой задачи для весьма широкого класса случаев были даны Коши.

Теоремы существования имели не только принципиальное значение, гарантируя законность применения методов ТДУ, но сами приёмы доказательства позволяли строить последовательные приближения к решениям.

В развитии ТДУ в конце 19 века- начале 20 века важнейшим событием явилось создание качественной ТДУ. Это стимулировалось изучением задач небесной механики и астрономии.

К концу 19 века проблема интегрирования ОДУ в квадратурах утратила значение. Поскольку такие решения существуют лишь для весьма небольшого круга уравнений, построение достаточно общей теории в этом направлении оказалось невозможным. Не открывали пути к общей теории и основанные на теоремах существования приемы численного решения ДУ. Они дают в каждой задаче только одно частное решение, отвечающее выбранным начальным условиям на конечном интервале.

Между тем, в различных областях небесной механики возникали проблемы, которые требовали изучения природы функций, определяемых ДУ, во всей области существования. Таков, например, вопрос об устойчивости солнечной системы или, в частном случае, о движении трех тел. Старые методы принципиально не позволяли ответить на вопрос о поведении такой системы в течение сколь угодно больших интервалов времени. Качественная ТДУ была одновременно создана Пуанкаре и Ляпуновым. Задача, поставленная Пуанкаре, состоит в том, чтобы, не интегрируя дифференциального уравнения, исследовать поведение семейства интегральных кривых на всей плоскости только по виду функции, стоящей в правой части. Он дал классификацию особых точек и показал их значение, исследовал поведение интегральных кривых в окрестности особых точек, ввел понятие предельного цикла.

Исследования Ляпунова по качественным методам начались с конкретной задачи астрономии – задачи о возможности существования фигур равновесия вращающейся жидкой массы. От задачи о фигурах равновесия вращающейся жидкости Ляпунов перешел к проблеме устойчивости равновесия и движения механической системы. Он ввел фундаментальнейшие понятия устойчивости решений дифференциальных уравнений. Ляпунов точно выяснил в каких случаях вопрос об устойчивости может быть решен по первому приближению. Решил вопрос об устойчивости в ряде «сомнительных» случаев, когда первого приближения недостаточно для суждения об устойчивости. При этом, изучение системы проводилось качественными методами, т.е. без ее непосредственного интегрирования.

Эти труды Ляпунова по устойчивости имели огромное значение для всего последующего развития ТДУ и ее приложений к изучению колебаний различных физических и механических систем.

В изучение проблем устойчивости по Ляпунову большой вклад внесли казанские учёные (Персидский, Малкин, Четаев, Каменков, Кузьмин, Матросов).

Общая качественная теория динамических систем разрабатывалась с 1912 года Биркгофом, Хинчиным, Тихоновым, Немыцким, Степановым. ТДУ с запаздывающим аргументом Мышкисом, Эльсгольцем.

**Примеры задач приводящих к дифференциальным уравнениям**

**Движение точки переменной массы**

Общая модель точки переменной массы допускает присоединение и отбрасывание частиц. То есть, масса точки в текущий момент времени может быть больше или меньше начальной.

Массу точки в момент времени t примем равной m. Пусть за время dt она изменится на величину

|  |  |
| --- | --- |
| *dm = dm₁ - dm₂* | (1) |

где *dm₁* — элементарная масса присоединившихся частиц,

*dm₂* - элементарная масса отделившихся частиц.

Пусть v, v+dv — скорости материальной точки в моменты времени t и t+dt соответственно, *w1* – абсолютная скорость частицы *dm₁* в момент времени t непосредственно перед ее присоединением, *w2* – абсолютная скорость частицы *dm2* сразу после ее отделения от точки.

При этих условиях:

– количество движения точки в момент времени t будет

|  |  |
| --- | --- |
| *K=mv* | (2) |

– количество движения точки в момент времени t+dt будет

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Изменение количества движения найдем, вычитая (2) из (3) и пренебрегая малыми второго порядка, получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Количество движения точки изменяется

– из-за сообщения ей дополнительного движения *w1dm1* присоединившейся элементарной массы *dm1*

– из-за уноса количества движения *w2dm2* частицей *dm2*

– (в общем случае) на материальную точку может действовать в течении времени *dt* внешняя сила F, в результате чего произойдет дополнительное изменение количества движения на величину *Fdt*. Таким образом изменение количества движения за время *dt*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Приравнивая (4) и (5) получим так называемое уравнение Мещерского

|  |  |
| --- | --- |
| , | (6) |

где введены относительные скорости присоединения и отделения частиц

|  |  |
| --- | --- |
| *u1 = w1* – *v1, u2 = w2 - v2* | (7) |

А также положительные величины , характеризующие интенсивность процесса.

Скорость изменения массы точки будет

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Как видно из уравнения (6) сила создает ускорение, совпадающее по направлению с направлением относительной скорости *u1* присоединения частиц. Сила сообщает точке ускорение, противоположное направлению относительной скорости *u2* отбрасываемых частиц.

В зависимости от соотношения между величинами *w1* и *v1* можно представить себе различные случаи воздействия процесса изменения массы на движение точки.

Запишем уравнение Мещерского для наиболее типичного случая реактивного движения, когда присоединения частиц не происходит

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Поскольку в этом случае, на основании (8)

, то будем иметь

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

где - абсолютная величина секундного расхода, u - скорость истечения.

Уравнение движения (10) отличается от уравнения движения

,

полученного для тела переменной массы, отсутствием малых членов . Отсутствие этих членов, зависящих от вектора очевидно, т.к. уравнение (10) описывает не движение центра масс, а движение точки переменной массы.

# ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

# ПЕРВОГО ПОРЯДКА

## Основные понятия и определения

*Дифференциальное уравнение -* уравнение, в которое наряду с неизвестной функцией входят и ее производные.

Если неизвестная функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Если неизвестная функция зависит от нескольких аргументов, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных.*

В общем виде дифференциальное уравнение можно записать как

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

где  - независимая переменная, - искомая функция, - производные функции.

*Порядок дифференциального уравнения* – это наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение.

*Решение дифференциального уравнения* - функция , определенная на некотором интервале, которая, будучи поставлена в исходное дифференциальное уравнение, обращает его в тождество:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.2) |

Отсюда очевидно, что функция должна быть дифференцируема столько раз, каков порядок дифференциального уравнения.

*Интервал определения решения* - интервал, на котором определена функция.

*Интегрирование дифференциального уравнения* - процесс нахождения решения дифференциального уравнения.

*Интегральная кривая дифференциального уравнения* - график функции являющейся решением этого уравнения.

*Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.3) |

называется функция , где С - произвольное постоянное такое, что при любом значении С функция является решением дифференциального уравнения, и для любой точки можно найти такое числовое значение *С*, при котором интегральная кривая будет проходить через данную точку.

*Общим интегралом дифференциального уравнения* называется соотношение

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

из которого при любом значении С может быть определена интегральная кривая.

Геометрически общее решение представляет собой семейство кривых, зависящих от параметра *С*.

*Частное решение* - одна из интегральных кривых этого семейства, проходящая через заданную точку .

Задачей Коши для дифференциального уравнения (1.3) называется задача определения такого решения этого уравнения, которое удовлетворяет заданному начальному условию [1]

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

## Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Метод изоклин.

**Геометрическая интерпретация**.

Будем рассматривать дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, т.е. дифференциальное уравнение вида:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (1.3) |

где *f (x, у)* определена в некоторой области D.

Это уравнение задает в каждой точке области D значение , т.е. угловой коэффициент касательной к проходящему через эту точку графику решения уравнения (1). Если представить в каждой точке с помощью некоторого отрезка направление касательной, определяемое значением , то получим **поле направлений**. Тогда, основную задачу ТДУ можно сформулировать так: требуется найти кривую , касательная к которой в каждой точке имеет направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

В точке, где направление поля параллельно оси Оу, т.е. где угловой коэффициент касательной по отношению к оси Ох не имеет смысла, можно пользоваться угловым коэффициентом по отношению к оси Оу и, соответственно этому, наряду с уравнением (1.3) рассматривать уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.4) |

Оба уравнения (1.3) и (1.4) могут быть записаны как уравнение в дифференциалах:

|  |  |
| --- | --- |
| *dy=f(x,у)dx* | (1.5) |

Так как, точек с одним и тем же в области D бесконечно много, решение ДУ получается неоднозначным. Чтобы найти единственное решение ДУ, надо задать дополнительное условие, называемое начальным:

*y(x0)=y0*, где *х0* и *у0* заданные числа.

**Пример 1.** Построить интегральные кривые ДУ .

Решение. В каждой точке, отличной от (0; 0), угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой равен отношению , т.е. совпадает с угловым коэффициентом прямой, направленной из начала координат в ту же точку *(x, y)*.

**Пример 2** Построить интегральные кривые ДУ .

Решение. Замечаем, что угловой коэффициент касательной к искомым интегральным кривым и угловой коэффициент касательной к интегральным кривым примера 1 в каждой точке удовлетворяют условию ортогональности . Следовательно, поле направлений, определяемое рассматриваемым ДУ, ортогонально полю направлений ДУ примера 1. Очевидно, интегральными кривыми данного уравнения являются окружности с центром в начале координат (точнее говоря, полуокружности ).

Задача построения интегральных кривых часто решается с использованием метода изоклин.

**Метод изоклин**

**Изоклиной** называется геометрическое место точек, в которых направление касательных к искомым интегральным кривым, проходящим через эти точки, одинаковы. Семейство изоклин ДУ определяется уравнением , где *k* – некоторый параметр ().

Придавая параметру *k* близкие числовые значения, получаем достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых можно приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения.

Построив нулевую изоклину, получаем геометрическое место точек возможных экстремумов функций, являющихся решением ДУ. Нулевая изоклина будет делить плоскость на две полуплоскости, в каждой из которых знак остается постоянным. Для большей точности построения интегральных кривых можно найти геометрическое место точек перегиба. Для этого находят в силу заданного уравнения:

и приравнивают её нулю. Линия, определяемая уравнением

и есть возможное геометрическое место точек перегиба.

**Пример 3.** Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

.

Решение. Положим , *k = const*. Тогда уравнение изоклин будет

или .

Изоклинами являются параболы с вертикальной осью симметрии *x* = 1. Среди изоклин нет интегральных кривых. В самом деле, подставляя и *у' = 2х – 2*, в данное уравнение будем иметь или *2x – 2 = k*. Но это равенство ни при каком значении *k* не может выполняться тождественно относительно *x*.

Пусть *k*=0. Тогда в точках пересечения с изоклиной интегральные кривые будут иметь горизонтальные касательные. Изоклина разбивает плоскость хОу на две части: в одной из них *у'* < 0 (решения *у* убывают), а в другой *у'* > 0 (решения у возрастают). И так как эта изоклина не является интегральной кривой, то на ней находятся точки экстремума интегральных кривых. А именно, на той части параболы , где *х* < 1 — точки минимума, а на другой части этой параболы, где *х* > 1 — точки максимума. Интегральная кривая, проходящая через точку (1; 1), т.е. через вершину параболы , в этой точке не имеет экстремума. В точках изоклин ( *k* =1) и (*k* = – 1) касательные к интегральным кривым имеют угловые коэффициенты, соответственно равные 1 и -1.

Для исследования направления вогнутости интегральных кривых найдем вторую производную:

Она обращается в ноль только в точках, лежащих на параболе *y =x2* . В точках плоскости *хОу*, координаты которых удовлетворяют условию *y < x2* , интегральные кривые вогнуты вниз (*у"* < 0), а в точках, где *y > x2* , они вогнуты вверх (*у"* > 0). Точки пересечения интегральных кривых с параболой *y =x2* являются точками перегиба этих кривых. Итак, парабола *y = x2* есть геометрическое место точек перегиба интегральных кривых.

Правая часть исходного уравнения во всех точках плоскости *х0у* удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, поэтому через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая уравнения.

Используя полученные сведения, строим приближенно семейство интегральных кривых данного уравнения



Рис. 1.1

Точки пересечения двух или нескольких изоклин могут быть **особыми точками дифференциального уравнения** (1.3), т.е. такими точками, в которых правая часть уравнения (1.3) не определена.

**Пример 4.**

Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

Решение. Полагая , *k = const*, получаем уравнение семейства изоклин . Таким образом, изоклинами являются прямые, проходящие через начало координат O(0,0).

При *k* = -1 получим изоклину *у* = 0, при *k*= 0 — изоклину *у = х*, при *k*=1 — изоклину *x* =0.

Рассматривая «перевернутое» уравнение , найдем изоклину , во всех точках которой интегральные кривые имеют вертикальные касательные.

В точке (0,0) пересекаются все изоклины данного уравнения (особая точка уравнения).

С помощью полученных изоклин строим интегральные кривые (рис. 1.1, рис.1.2).



Рис. 1.2

**Задачи для самостоятельного решения.**

Методом изоклин построить интегральные кривые следующих дифференциальных уравнений:

1. .

2. .

3. .

4..

5..

6..

7..

8. .

9..

10..

## Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Простейшим дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение, разрешенное относительнои не содержащее *y*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.6) |

В этом случае для нахождения неизвестной функции достаточно найти неопределенный интеграл от функции , тогда общее решение уравнения (1) запишется в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.7) |

Если задано начальное условие, то можно вычислить значение *С* и получить частное решение.

**Пример.** Решить уравнение  с начальным условием при 

Решение.

Общее решение



Положим в общем решении  при  и найдем частное решение:



Дифференциальное уравнение вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.8) |

где множителем при  является функция, которая зависит только от *x*, а множителем при  - функция, зависящая только от , называется *уравнением с разделенными переменными.*

Предположим, функция является его решением. Если вычислить

и подставить в уравнение (1.8) вместо  и  их выражения и , то согласно определению решения, получим тождество

, которое можно проинтегрировать таким образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.9) |

где в левой части содержатся первообразные функции и , а произвольные постоянные от обоих интегралов объединены в одно произвольное постоянное *С*, помещенное в правой части.

Второй интеграл можно преобразовать посредством замены переменной, считая что *.* При этом равенство (1.9) преобразуется к виду

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.10) |

Данное равенство представляет собой конечное соотношение между *x* и *y*, которому удовлетворяют все решения уравнения (1.8).

Если какая-нибудь функция при подстановке обращает

уравнение (1.10) в тождество, то дифференцированием последнего устанавливаем, что она удовлетворяет уравнению (1.8). Следовательно, равенство (1.10) является общим интегралом уравнения (1.8) [5].

**Пример.** Решить уравнение:

Решение.

 откуда 

Так как , имеем  и 

Дифференциальное уравнение вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.11) |

где правая часть представляет собой произведение двух функций, одна из которых не зависит от, а вторая не зависит от, называется *уравнением с разделяющимися переменными.* Это уравнение интегрируется способом разделения переменных, сводящем его к рассмотренному типу уравнения с разделенными переменными (1.8). Для этого обе части уравнения (1.11) делим на  и умножаем на *.* Получим уравнение

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.12) |

в котором переменные разделены. Проинтегрировав, находим общий интеграл

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.13) |

Уравнением с разделяющимися переменными называется также уравнение в дифференциалах вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.14) |

так как делением на оно приводится к виду (1.8). Его общий интеграл:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.15) |

**Пример.** Решить уравнение 

Решение.



откуда .

При делении на  могли потерять , проверка показывает, что  также решение [1].

## Дифференциальные уравнения, однородные относительно *х*, *у* и приводящиеся к ним

Функция *f*(*x,y*)называется *однородной функцией нулевого измерения*, если при умножении аргументов *x* и *y* на произвольный параметр значение функции

не изменяется.

Однородная функция нулевого измерения может быть записана в виде Действительно, пусть *–* однородная функция нулевого измерения. Пользуясь тем, что параметр *t* можно выбирать произвольно, положим *t=1/x*. Тогда

.

**Пример**. тогда. Разделив числитель и знаменатель дроби на *x*, получим

Дифференциальное уравнение *y’=f*(*x,y*) называется *однородным* относительно *x* и *y*, если функция *f*(*x,y*) является однородной функцией своих аргументов нулевого измерения. Таким образом, однородное уравнение можно записать в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.16) |

Функция *f*(*x,y*) называется *однородной функцией n-го измерения*, если при замене в ней переменных *x* и *y* соответственно на *tx* и *ty,* где *t* – произвольная величина (параметр), получается та же функция, умноженная на , т.е. выполняется условие Показатель степени называется *измерением однородности функции* [5].

Уравнение

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.17) |

в котором функции *M*(*x,y*) и *N*(*x,y*) однородные функции одного и того же измерения, также является дифференциальным уравнением, *однородным относительно x* и *y.* Уравнения (1.16) и (1.17) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой *y = xz*, где *z* – новая искомая функция. Дифференцируя равенство *y = xz*, получим



Подставим выражения для *y* и *dy* в уравнение (1.16)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.18) |

откуда  или в дифференциалах *xdz=*(*f*(*z*)*-z*)*dx*. Это уравнение с разделяющимися переменными. Поделим обе части на *x*(*f*(*z*)*-z*)*,* получимоткуда находим

Если , то окончательно общий интеграл уравнения (1.16) примет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.19) |

**Пример.** Решить уравнение

Решение.

 тогда

 откуда  и кроме того, решением является *z=*0*,* следовательно, *у=*0*.*

Уравнение вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.20) |

приводится к однородному или с разделяющимися переменными, для чего введем новые переменные *u* и *v* вместо *x* и *у*, положив *x=u+α , y=v+*β. Числа αи β выберем так, чтобы уравнение стало однородным. Так как при указанной замене *dx=du, dy=dv*, уравнение примет вид

это равносильно требованию

**Пример.** Найти общий интеграл уравнения

Решение.

Положим, *x=u+*α*, y=v+*β, тогда *dx=du, dy=dv* и уравнение примет вид

.

Выберем α и β так, чтобы удовлетворялась система уравнений

т.е. α*=*2, β =1(корни).

Получим однородное уравнение 

Введем новую переменную , положив *v=uz*, а значит 

Тогда  откуда

или

.

Возвращаясь к прежним переменным *x* и *y*, получим общий интеграл

или

где .

Обобщенные однородные дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение вида *M*(*x,y*)*dx+N*(*x,y*)*dy=0* называется *обобщенным однородным* уравнением, если можно выбрать показатель степени ****так, чтобы подстановка преобразовала данное уравнение в однородное относительно x и y [6].

**Пример.** Дано уравнение .

Проверим, что оно является обобщенным однородным уравнением и проинтегрируем его. Положим .Тогда и уравнение примет вид

Чтобы множитель при *dx* был однородной функцией (и при том первой степени, так как первое слагаемое первой степени), необходимо потребовать, чтобы откуда α*=*1/3. Проверим, будет ли множитель при *dz* тоже однородной функцией первой степени. Если α*=*1/3, то это действительно имеет место.

Следовательно, подстановка *y=z*1/3 приведет исходное уравнение к однородному виду .

В этом уравнении проведем еще одну замену переменной, положив *z = ux* и соответственно *dz = xdu +udx*. Получим или после разделения переменных

Отсюда или .

Так как  то окончательно получаем .

Кроме того, , что дает , откуда [2].

## Линейные уравнения 1-го порядка и приводящие к ним

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно линейно, (т.е. первой степени), относительно искомой функции и ее производной *.* Общий вид линейного уравнения первого порядка

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.21) |

Если правая часть уравнения (1.21) равна 0, то уравнение (1.21) называется *линейным однородным*.

Не следует смешивать линейное однородное уравнение с уравнением, однородным относительно и.

Термин «однородное» появляется применительно к линейному уравнению, потому что выражение  является однородной функцией первого измерения относительно  и ****, в противном случае оно называется *неоднородным*.

Предположим, что уравнение (1.21) неоднородное, т.е. ≠0. Приведем два способа интегрирования этого уравнения: способ подстановки и способ вариации произвольного постоянного. Случай однородного линейного уравнения не требует специального рассмотрения, поскольку при  уравнение (1.21) одновременно является уравнением с разделяющимися переменными [6].

***Способ подстановки*.** Произведем в уравнении (1.21) замену переменной, положив . Вместо в качестве искомой функции введем новую переменную, например, . Вторую переменную  можно рассматривать как вспомогательную и выбирать ее по своему усмотрению. Вычислим  и подставим выражение  и  (через  и ) в уравнение (1.21), так как **** то уравнение (1.21) примет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.22) |

Пользуясь тем, что вспомогательная переменная  может быть выбрана произвольно, подберем ее так, чтобы выражение, содержащееся в квадратных скобках, обратилось в нуль, т.е. потребуем, чтобы

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.23) |

Это уравнение с разделяющимися переменными. Поделив обе его части на  и умножив на , получим, , откуда интегрированием найдем** или

|  |  |
| --- | --- |
| . | (1.24) |

Подставив выражение для (1.24) в уравнение (1.22), получим для уравнение с разделяющимися переменными:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (1.25) |

Умножая обе части его на , имеем 

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.26) |

Формулы (1.26) и (1.24) дают выражения  и  через , так как нам нужно найти зависимость  от , а , то окончательно общее решение уравнения (1.21) запишется в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.27) |

В решении (1.24) можно заранее положить  и взять частное решение  уравнения (1.23) вместо общего, как обычно и поступают на практике.

Этот способ подстановки позволяет свести задачу интегрирования одного линейного уравнения (1.21) к отысканию решений двух уравнений с разделяющимися переменными (1.23) и (1.25).

**Пример.** Найти общее решение линейного уравнения 

Решение.

Положим , тогда и уравнение преобразуется к виду.

Потребуем, чтобы 

Разделяя переменные, получим  откуда 

Можно ограничиться частным решением  Подставив выражение  в преобразованное уравнение, будем иметь  или откуда  если  и  если 

Так как  то общее решение получается в виде  если  и  если 

***Способ вариации произвольного постоянного*.** Вместо того чтобы искать решение неоднородного уравнения (1.21), где ****, решим сначала соответствующее ему однородное уравнение (1.23) с разделяющимися переменными. Его общее решение

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.28) |

Найденная функция , в выражении которой – произвольное постоянное, не может быть решением неоднородного уравнения. Действительно, при подстановке вместе со своей производной в уравнение (1.21) она обратит левую часть уравнения тождественно в нуль, в то время как правая часть не равна нулю. Однако если рассматривать  не как произвольное постоянное, а как некоторую функцию от , т.е. , то оказывается, что можно подобрать функцию  так, чтобы функция (1.28) стала решением неоднородного уравнения (1.21).

Для нахождения функции  вычислим производную функции , подставим выражение  и  в уравнение (1.21). Так как то уравнение (1.21) переходит в уравнение

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.29) |

Получили уравнение с разделяющимися переменными и неизвестной функцией  Его общее решение 

Подставляя найденное выражение в равенство (1.28), получим искомое решение неоднородного уравнения (1.21) в виде: 

Название способа происходит от того, что варьируем (изменяем) произвольное постоянное , считая его функцией от . Этот способ, как и предыдущий, свел уравнение (1.21) к двум уравнениям с разделяющимися переменными (1.28) и (1.29) [3].

**Пример.** Решить уравнение .

Решение.

Сначала найдем решение уравнения . Разделением переменных этого уравнения получим  и

Будем варьировать  полагая При этом  и 

Подставив в исходное уравнение выражения для и , получимили после упрощений  откуда

Подставив выражение  в решение однородного уравнения, придем к общему решению исходного уравнения

***Уравнение Бернулли*.** Общий вид уравнения Бернулли

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.30) |

где . При *n=*0 уравнение Бернулли переходит в линейное неоднородное уравнение; при  оно является уравнением с разделяющимися переменными, так как может быть преобразовано к виду



и, следовательно, может быть проинтегрировано разделением переменных.

Предположим, что . Уравнение Бернулли можно соответствующей подстановкой привести к линейному виду, для чего разделим обе части этого уравнения на :



Положим . Тогда  и уравнение Бернулли принимает вид

Это линейное уравнение первого порядка с неизвестной функцией . Его можно проинтегрировать способом подстановки или способом вариации произвольного постоянного и найти  как функцию от . Возвращаясь к первоначальной функции  путем обратной замены  на , получим общий интеграл уравнения Бернулли [6]. Кроме того, решением любого дифференциального уравнения Бернулли при *n>*0 является функция 

Замечание***.*** Из всего сказанного следует, что любой из этих способов может быть применен к уравнению Бернулли непосредственно, минуя промежуточный этап и сведение последнего к линейному виду.

**Пример.** Решить уравнение ****

Решение.

Разделив обе части уравнения на  получим

Положим  тогда  и уравнение принимает вид

Это линейное уравнение проинтегрируем методом вариации. Общее решение однородного уравнения  есть 

Полагая  вычислим****

и, подставив в линейное неоднородное уравнение, получаем

 или  откуда и, следовательно, общее решение неоднородного уравнения 

Заменив  через , получим  или 

**Уравнение Риккати.**

Общее уравнение Риккати имеет вид

, (1 )

Где *p(x), q(x), f(x)* – непрерывные функции от *x* в интервале *(a, b)*.

Уравнение (1) заключает в себе как частные случаи уже рассмотренные нами линейное уравнение (при *q(x)*=0) и уравнение Бернулли (при *f(x)*=0).

Уравнение Риккати в общем виде не интегрируется в квадратурах! Но если известно одно какое-либо частное решение данного уравнения, то оно может быть заменой переменных преобразовано в уравнение Бернулли.

В самом деле, пусть известно частное решение уравнения (1) *y=y1(x)*, то есть мы имеем тождество . Выполняя замену переменных *y=y1+z*, где *z* – новая искомая функция, получим

или, учитывая тождество , имеем

. (2)

Получилось действительно уравнение Бернулли, которое интегрируется описанным выше способом двумя квадратурами.

**Пример.** . Нетрудно подобрать частное решение .

Тогда, полагая , получим или , т.е. уравнение Бернулли.

Используя подстановку Бернулли *z=uv*, будем иметь

. Тогда, определяя *u* из условия или , получим , после чего будем иметь

Таким образом, функция и общее решение исходного уравнения .

**Задачи для самостоятельного решения.**

Проинтегрировать уравнения [4]:

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

## Уравнения в полных дифференциалах

Если левая часть уравнения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.31) |

представляет собой полный дифференциал некоторой функции , т.е., если то уравнение (1.31) называется *уравнением в полных дифференциалах*.

В этом случае его можно записать, как откуда интегрированием получим общий интеграл 

**Пример.** Уравнение **** есть полный дифференциал функции . Поэтому уравнение можно записать в виде:  откуда находим общий интеграл .

Возникает вопрос: при каких условиях уравнение (1.31) представляет собой уравнение в полных дифференциалах  и как найти функцию . Ответом на этот вопрос является следующая теорема.

***Теорема.*** Для того чтобы дифференциальное выражение

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.32) |

где функции  и  определены и непрерывны в области 

плоскости  и имеют в ней непрерывные частные производные  и  представляло собой полный дифференциал некоторой функции , необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области  было выполнено условие

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.33) |

*Доказательство***.** Докажем сначала необходимость этого условия, для чего предположим, что существует такая функция , что , и докажем, что имеет место равенство (1.33). Полным дифференциалом функции  является выражение . Так как оно равно выражению (1.32), то имеем тождество

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.34) |

справедливое для любых  и . Сравнивая множители при  и , получим 

Продифференцируем обе части первого равенства по  а второго – по*,* имеем 

Из равенства производных  заключаем, что

Докажем теперь достаточность условия (1.34). Для этого предположим, что оно имеет место, и докажем, что выражение (1.32) представляет собой полный дифференциал некоторой функции  т.е. что справедливы равенства

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.35) |

Тем самым задача сводится к отысканию функции , удовлетворяющей системе (1.35) из двух дифференциальных уравнений с частными производными.

Возьмем первое из уравнений (1.35). Его решение можно записать в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.36) |

где  абсцисса какой-либо точки области , а произвольная функция от, заменяющая произвольную постоянную , поскольку интегрирование производится по  в предположении, что  сохраняет неизменное значение. Определим так, чтобы удовлетворялось и второе из уравнений (1.35). Продифференцируем обе части равенства (1.36) по  Тогда получим

но так как , а согласно теореме о дифференцировании определенного интеграла по параметру имеем то .

По условию , следовательно .

Последний интеграл равен .

поэтому откуда

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.37) |

Итак, не только доказано существование функции , но даже выведена формула для нахождения этой функции (1.36).

При решении соответствующих задач можно не пользоваться готовой формулой (1.37), а поступать таким же образом, как в общем случае (или с заменой определенных интегралов неопределенными) [5].

**Пример.** Решить уравнение .

Решение.

,

.

Следовательно,  Найдем функцию  удовлетворяющую уравнениям

Первое из этих уравнений дает

.

Отсюда поскольку то откуда и .

Следовательно, .

Если бы надо было проинтегрировать дифференциальное уравнението, переписав его в виде мы получили бы общий интеграл.

**Интегрирующий множитель.** Если условие  не выполнено, то дифференциальное уравнение (1.31) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако его можно превратить в уравнение в полных дифференциалах умножением на подходящую функцию , которая носит название *интегрирующего множителя* для данного дифференциального уравнения. Оказывается, что для каждого дифференциального уравнения существует такой множитель. Покажем, как определяется этот множитель для уравнения (1.32).

Для того чтобы уравнение было уравнением в полных дифференциалах, должно быть выполнено условие .

Дифференцируем последнее как произведение и получаем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.38) |

Равенство (1.38) является дифференциальным уравнением интегрирующих множителей уравнения (1.31), поскольку каждое из его решений, будучи умножено на обе части уравнения (1.31), приводит последнее к уравнению в полных дифференциалах. Для нахождения µ(*x,y*) надо проинтегрировать уравнение с частными производными (1.38).

Задача значительно упрощается, если µ зависит от , но не зависит от , или зависит от , но не зависит от .

Пусть , тогда уравнение (1.38) примет вид:

; ; ;

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.39) |

Произвольная постоянная равна 0, поскольку достаточно иметь какой-нибудь один интегрирующий множитель.

Пусть ,. Тогда уравнение (1.38) примет вид:

или ,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.40) |

Для приведения уравнения (1.31) к уравнению в полных дифференциалах в рассматриваемых частных случаях составляют выражение  и берут его отношение к . Если это отношение не зависит от , то для нахождения интегрирующего множителя следует пользоваться формулой (1.39), в противном случае пользуются формулой (1.40).

**Пример.** Решить уравнение .

Решение.

, , , , .

Отношение  зависит от  и , а отношение  - только от .

Следовательно, интегрирующий множитель может быть найден по формуле (1.39):

Умножая обе части уравнения на , получим

или 

Так как , то общий интеграл получается интегрированием в виде 

## 

## Уравнения 1-го порядка *n*-степени, не разрешенные относительно производной

***Уравнения 1-го порядка n-степени***. Левая часть уравнения представляет собой целую рациональную функцию относительно :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.41) |

где *n* - целое положительное число: - функции от *x* и *y*.

Допустим, что можно решить это уравнение относительно . При этом, вообще говоря, получается *n* различных выражений для:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В этом случае интегрирование уравнения (1.41) свелось к интегрированию *n* уравнений первой степени. Пусть их общие интегралы будут соответственно:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.42) |

Перемножим левые части интегралов (1.42) и приравняем произведение нулю:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.43) |

Если разрешим уравнение (1.43) относительно *y*, то мы получим общее решение уравнения (1.41).

**Пример.** Решить уравнение

Решение.

Это их общие интегралы. Поэтому общий интеграл исходного уравнения имеет вид

***Уравнение, разрешенное относительно y и не содержащее x.*** Речь идет об уравнении вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.44) |

В этом случае целесообразно применить метод введения параметра, когда рассматриваемые переменные выражаются через параметр и решение ищется в параметрической форме.

Положим уравнение при этом запишется в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.45) |

Если удастся получить еще одно уравнение, выражающее *x* через *p* и *С*, то совокупность этих двух уравнений будет являться общим решением

уравнения (1.44) в параметрической форме. Исключая из них параметр *p*, можно получить зависимость между *x*, *y* и *С*, т.е. общий интеграл в обычной форме.

Второе уравнение найдем следующим образом. Перепишем равенство в виде; отсюда . К интегралу применим формулу интегрирования по частям и получим:

Следовательно,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.46) |

Система уравнений (1.45) и (1.46) является общим решением уравнения (1.44) в параметрической форме. Исключая, если это возможно, параметр из этих уравнений, получим общий интеграл в форме.

**Пример.** Решить уравнение .

Решение.

.

Продифференцируем по , получим или, так как и можно сократить на, то имеем, отсюда

и . Общее решение запишется в виде



При этом предполагаем, что . Если же , то это дает решение , которое, как легко видеть, удовлетворяет уравнению лишь при .

***Уравнение, разрешенное относительно x и не содержащее y.*** Уравнение имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.47) |

Поступаем аналогично предыдущему. Положим. Тогда уравнение запишется в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.48) |

Равенство перепишем как , отсюда

или

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.49) |

Система уравнений (1.48), (1.49) является общим решением уравнения (1.47) в параметрической форме. Исключая, параметр *р*, получим общий интеграл 

**Пример.** Решить уравнение

Решение.

тогда . Равенство перепишем Так как , то следовательно. Общее решение запишем в виде

***Уравнение, не содержащее или , но не обязательно разрешенное относительно или***Уравнение имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
| или |  |

причем предполагаем, что из уравнения удается выразить (в первом) или (во втором), а также через параметр. Общее решение уравнения получается в параметрической форме.

Рассмотрим, например, уравнение . Предположим, что, полагая , из уравнения нашли или, наоборот, полагая , нашли из уравнения . Тогда, с одной стороны, , а с другой . Сравнивая оба выражения для *,* получим

, откуда и . Общее решение в параметрической форме запишется в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Пример**. Решить уравнение .

Решение.

Положим , тогда . Из равенства находим . Так как , то и. В параметрической форме общее решение запишется так:

Исключим параметр. Для этого из первого уравнения находим и подставляем во второе. Имеем и.

***Уравнение Лагранжа*.** Так называется уравнение, линейное относительно и , т.е. имеющее вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.50) |

Предположим, что. Случай рассматривается отдельно. Для интегрирования уравнения Лагранжа применим также параметрический метод. Положим. Тогда уравнение запишется в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.51) |

Дифференцируя по, получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.52) |

или после замены через , умножения наи алгебраических преобразований,

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Это линейное уравнение относительно функции и производной . Его общий интеграл имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.53) |

Вместе с уравнением (1.51) он дает общий интеграл уравнения Лагранжа в параметрической форме. Исключая *p* из равенств (1.51) и (1.53), получим общий интеграл уравнения Лагранжа .

Заметим, что произведенное преобразование уравнения (1.52) возможно, если . Если уравнение имеет корни , то они дадут также решения .

**Пример.** Решить уравнение

Решение.

Положим . Тогда или . Продифференцировав по, имеем

После несложных преобразований получим

откуда

Проведя потенцирование, находим

Следовательно, общее решение в параметрической форме имеет вид

Исключим параметр и найдем общее решение:

***Уравнение Клеро*.** Уравнением Клеро называется частный случай уравнения Лагранжа, когда ψ(*y'*) ≡y'. Общий вид уравнения Клеро *y=xy'+*ψ*(y')*. Положим, тогда *y=xp+*ψ*(p)*. Продифференцировав по , получим, , т.е. , откуда  или . Из уравнения  получаем, что . Подставляя  вместо  в , получим общее решение уравнения Клеро , представляющее собой геометрически семейство прямых.

Решение уравнения Клеро в параметрической форме имеет вид:

В самом деле, из этих уравнений находим, что ; откуда . Подстановка в уравнение Клеро приводит к тождеству. Исключая из двух уравнений системы параметр , получим интеграл  уравнения Клеро.

## Задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка

***Теорема о существовании единственного решения задачи Коши***

Функция удовлетворяет *условию Липшица* на,если

**Лемма 1**. Если функция удовлетворяет условию Липшица на, то она будет непрерывной на этом отрезке.

**Лемма 2.** Если функция дифференцируема на, т.е.

, то эта функция удовлетворяет условию Липшица.

Рассмотрим *задачу Коши*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.54) |
|  | (1.55) |

т.е. задачу нахождения решения(1.54), удовлетворяющего условию (1.55).

Для задачи Коши существует ряд теорем о существовании и единственности ее решения.

Из всех теорем наиболее удачной является теорема Пикара, так как она наряду с доказательством позволяет построить приближенный метод нахождения решения задачи Коши.

***Теорема Пикара*.** Пусть функция, т.е. правая часть дифференциального уравнения (1.54), определена и непрерывна в области

и в каждой точке этой области удовлетворяет условию Липшица по:

Тогда существует единственное решение дифференциального уравнения (1.54), удовлетворяющее начальному условию (1.55), определенное в интервале

***Доказательство.***

Дана задача Коши

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.56) |
|  | (1.57) |

Пустьявляется решением задачи Коши (1.56), (1.57).

интегрируя, получим

тогда

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.58) |

Уравнение (1.58), в котором искомая функция входит под знак интеграла, называется *интегральным* уравнением.

Интегральное уравнение (1.58) эквивалентно задаче Коши (1.56), (1.57).

Построим последовательность функций ,здесь – -е последовательное приближения Пикара (примем в качественачальное условие):

**. . .**

**. . .**

Пусть

Следовательно, .

Значит

Пусть .

Тогда

Следовательно,

Таким образом, доказано, что построенная последовательность функций, являющаяся последовательным приближением Пикара, существует.

Докажем, что последовательность функции сходится к некоторой непрерывной функции:

Для этого представим следующим образом

Чтобы доказать сходимость последовательности, достаточно доказать, что сходится ряд

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.59) |

Рассмотрим

*h* или

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Выберем С так, чтобы выполнялись условия

Таким образом, доказано, что члены ряда (1.59) по абсолютной величине не превышают соответствующих членов ряда

*,* который будет сходиться при условии, что т.е. .

Но тогда в соответствии с признаком Вейерштрасса функциональный

ряд (1.59) сходится равномерно на Н, и пределом или суммой этого ряда является функция, непрерывная на :

Докажем, что эта функцияявляется решением интегрального

уравнения (1.58):

Рассмотрим *n*-е приближения Пикара

и перейдем к пределу при

При доказательстве, что – решение уравнения (1.58), необходимо показать, что

Для этого рассмотрим разность интегралов

Далее в силу равномерной сходимости последовательности

, имеем

Таким образом, доказано, что каким бы ни было выбрано , можно указать номер начиная с которого выполняется неравенство:

а это и означает, что

Таким образом, доказано, что функция, являющаяся пределом последовательности ,есть не что иное, как решение интегрального уравнения(1.58), а значит и решение задачи Коши (1.56), (1.57).Тем самым доказано, что решение существует.

Докажем единственность решения. Рассуждаем от противного.

Предположим

Вычтем эти уравнения почленно и вычислим модуль разности:

.

Таким образом, получена оценочная формула, из которой следует, что при, но это противоречит полученному ранее условию.

Полученное противоречие доказывает, что другого решения, отличного от не существует.

## Особые точки. Особые решения

Если дифференциальное уравнение  в некоторой области  удовлетворяет всем условиям теоремы Пикара, то через каждую точку этой области проходит единственная интегральная кривая и тогда эти точки области  называют *обыкновенными*.

Наряду с этими, рассматривают точки, через которые не проходит ни одна интегральная кривая или проходит не единственная интегральная кривая. Такие точки называются *особыми*.

Интегральная кривая, сплошь состоящая из особых точек, называется *особой интегральной кривой*. Решение, графиком которого является особая кривая, называется *особым решением*.

Особое решение следует искать, выделяя такие совокупности точек, в которых нарушаются условия теоремы Пикара.

Из двух условий, при которых существует единственное решение задачи Коши, первое условие (непрерывность правой части) нарушается гораздо реже, чем второе (условие Липшица).

Вместо второго условия можно рассматривать более грубое условие ограниченности производной правой части по *y*:

 .

Точки, в которых нарушается условие ограниченности производной, можно определить из уравнения .

Заметим, что условия теоремы Пикара являются лишь достаточными, но не необходимыми, потому не все точки, в которых нарушаются эти условия, являются особыми точками.

Поведение интегральных кривых в окрестности особой точки может быть весьма разнообразным [6].

***Некоторые типы особых точек*.** 1. Уравнение , интегральные кривые в этом случае представляют собой семейство парабол с вершиной в начале координат. Точка (0,0) является особой точкой и называется *узлом*.

2. Уравнение , интегральные кривые в этом случае представляют собой семейство прямых, проходящих через начало координат (отличие от предыдущего случая в том, что любая интегральная кривая в особой точке имеет свое направление). Точка (0,0) является особой точкой и называется *дикритическим узлом*.

3. Уравнение , интегральные кривые в этом случае представляют собой семейство гипербол, асимптотами которых служат оси координат *x=*0,*y=*0. Точка (0,0) является особой точкой и называется *седловиной*.

4. Уравнение , интегральные кривые в этом случае представляют собой семейство логарифмических спиралей вокруг начала координат. Точка (0,0) является особой точкой и называется *фокусом*.

5. Уравнение. Через саму особую точку (0,0) не проходит ни одной интегральной кривой. Точка (0,0) является особой точкой и называется *центром*. Интегральные кривые в этом случае представляют собой концентрические окружности.

## 

## Метод Пикара

Процесс нахождения решения по методу Пикара основан на использовании интегрального уравнения  и сводится к построению последовательного приближения Пикара по формуле

 , *n*=1,2,…

**Пример 1.**

Пусть задано дифференциальное уравнение и начальные условия вида (задача Коши):

, .

Тогда









Метод Пикара имеет просто вычисляемую погрешность

Погрешность на *n*-м шаге вычисляется через погрешность на предыдущем шаге по формуле:

, *n*=1,2,…

Теперь вычислим погрешность для нулевого, первого, второго и *n-*го приближения (на 0-м, 1-м и *n*-шаге):

;

Тогда - формула для вычисления погрешности.

**Пример 2.** Найти решение задачи Коши

 , 

построить четвертое приближение  по методу Пикара и оценить погрешность.

Решение.

Максимальное значение функции в области D



*N*– оценка постоянной Липшица,

– интервал определения решения.

Погрешность на четвертом шаге

Четвертое приближение по методу Пикара строится следующим образом:

1) ;

2) 

3)  ;



5) 

## 

## Численные методы решения задачи Коши

***Метод Эйлера*.** Рассмотрим задачу Коши . Найти решение на интервале *.*

Разбиваем интервал следующим образом:



Если величина шага разбивки равна, то говорят, что выбрана равномерная сетка.

Имеем ряд Тейлора:



Чаще ограничиваются членами меньшими 2-го порядка по , тогда получаем вместо точного приближенное решение.

***Алгоритм Эйлера*.** Вместо движения по точной интегральной кривой, проходящей через точку , движение осуществляется по касательной к этой интегральной кривой в точке . На каждом звене двигаемся дальше вдоль касательной  

Таким образом, осуществляя интегрирование дифференциального уравнения по методу Эйлера, получаем аппроксимацию точного решения в виде ломаной линии (ломанной Эйлера), каждое звено которой представляет собой кусок касательной, проведенной к интегральной кривой соответственно в точках 

Доказывается, что если функция  непрерывная и ограниченная вместе со своими первыми производными , то построенные приближенные решения при стремлении к нулю сходятся к точному решению равномерно с первым порядком точности .

***Метод Рунге-Кутта*.** По этому методу можно строить алгоритмы вычислительных процедур, обладающих различными порядками точности.

Алгоритм, обладающий 1-м порядком точности, оказывается методом Эйлера. Наиболее употребительные алгоритмы 2-го порядка точности. Их несколько.

Пусть на отрезке [*a,b*] требуется найти численное решение задачи Коши *dx/dy=f*(*x,y*)*,* где *a = x*0. Разобьём этот участок на *n* равных частей и построим последовательность значений *x0, x1, …, xn* аргумента *x* искомой функции *y(x)* и *yk+1 = yk + Δyk,* , где *Δyk* - приращение искомой функции *y*(*x*)на (*k*+1)-м шаге интегрирования

*Δyk =* (*k* 1*,k +* 2*k* 2*,k +* 2*k* 3,*k + k* 4,*k*)*/*6*,*

*где k*1*,k = h*(*xk, yk*)*,*

*k*2*,k = hf*(*xk +* 0,5*h, yk +* 0,5 *k* 1*,k*)*,*

*k*3*,k = hf*(*xk +* 0,5*h, yk +* 0,5 *k* 2*,k*)*,*

*k*4*,k = hf*(*xk + h, yk + k* 3*,k*)*.*

Метод Рунге-Кутта может быть использован и при решении систем дифференциальных уравнений вида

⎧*dy/dx = f*1(*x,y,z*)*;*

⎩*dz/dx = f*2(*x,y,z*)*.*

В этом случае приращения *Δyk* и *Δzk*вычисляются по формулам:

*Δyk =* (*k* 1*,k +* 2*k* 2*,k +* 2*k* 3*,k + k* 4*,k)/*6

*Δzk =* (*m* 1*,k +* 2*m* 2*,k +* 2*m* 3,*k + m* 4*,k*)*/*6*, где*

*k*1*,k = hf*1(*xk, yk,k*)*,*

*m*1*,k = hf*2(*xk, yk, zk*)*,*

*k*2*,k = hf*1(*xk +* 0,5*h, yk + 0,5 k* 1*,k, zk +* 0,5 *m* 1*,k* )*,*

*m*2*,k = hf*2(*xk +* 0,5*h, yk +* 0,5 *k* 1,*k, zk +* 0,5 *m* 1*,k ),*

*k*3*,k = hf*1(*xk +* 0,5*h, yk +* 0,5 *k* 2*,k, zk +* 0,5 *m* 2,*k),*

*m3,k = hf*2*(xk +* 0,5h*, yk +* 0,5 *k* 2*,k, zk +* 0,5 *m* 2*,k),*

*k4,k = hf*1*(xk +* 0,5*h, yk +* 0,5*k* 3*,k, zk +* 0,5*m* 3*,k),*

*m4,k = hf*2*(xk +* 0,5*h, yk +* 0,5*k* 3*,k, zk +* 0,5*m 3,k).*

Приближенное интегрирование системы уравнений осуществляется по формулам вида:

*yk+*1*= yk + Δyk,, zk+*1 *= zk + Δzk.*

***Усовершенствованный метод Эйлера*.** Задана задача Коши (см. «Метод Эйлера») , , тогда



***Усовершенствованный метод Эйлера-Коши*.** Вычисляем функцию  в полученной новой точке:

 .

Из этих двух направлений берем среднее арифметическое и эту прямую выбираем в качестве касательной и проводим параллельную прямую через точку 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Наиболее употребительным является алгоритм 4-го порядка точности:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.60) |

***Геометрическая интерпретация*.** Вначале вычисляется tg угла наклона касательной к интегральной кривой, проходящей через точку . Используя этот угол наклона , выполняем движение из точки  по данному направлению  на величину .

В новой найденной точке вычисляем новый tg угла наклона , беря этот угловой коэффициент , выполняем движение из точки  в данном направлении вновь на полшага.

Выбирая этот , выполняем движение опять из точки , но уже на величину полного шага . В результате получим новую точку.

В этой точке еще вычисляем . Окончательно выбираем угловой коэффициент как осредненное значение найденных угловых коэффициентов  с весами соответственно  и в этом направлении выполняем движение из точки  на величину , получая окончательное значение .

Если сравнить правые части формулы (1.60) с разложением Тейлора, то можно убедиться, что имеется совпадение с членами этого разложения ниже 5-го порядка.

Доказывается, что если  непрерывна и ограничена вместе со своими производными до 4-го порядка включительно, то приближенное решение (1.60) равномерно сходится к точному решению с 4-м порядком точности .

## Контрольные вопросы

1. Что такое дифференциальное уравнение?
2. Какое дифференциальное уравнение называется обыкновенным?
3. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных?
4. Что такое порядок дифференциального уравнения?
5. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
6. Как называется процесс нахождения решения дифференциального уравнения?
7. Что такое общее решение дифференциального уравнения?
8. Что такое частное решение дифференциального уравнения?
9. Что представляют собой частное и общее решения дифференциального уравнения?
10. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?
11. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделенными переменными?
12. Записать в общем виде уравнение с разделенными переменными.
13. Записать в общем виде уравнение с разделяющимися переменными.
14. Дать определение однородной функции нулевого измерения.
15. Привести пример однородной функции *n*-го измерения.
16. Какая замена используется в однородном относительно *x* и *y* дифференциальном уравнении?
17. Записать в общем виде приводящееся к однородному дифференциальное уравнение.
18. Какая замена используется в обобщенном однородном уравнении?
19. Записать в общем виде линейное неоднородное уравнение.
20. Записать в общем виде линейное однородное уравнение.
21. Какие существуют методы решения линейных неоднородных уравнений?
22. В чем заключается метод подстановки для решения линейных неоднородных уравнений?
23. В чем заключается метод вариации произвольного постоянного для решения линейных неоднородных уравнений?
24. Записать в общем виде уравнение Бернулли.
25. Какая замена используется при решении уравнения Бернулли?
26. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением в полных дифференциалах?
27. Что такое интегрирующий множитель?
28. Перечислить типы неразрешенных относительно производной дифференциальных уравнений.
29. Метод решения дифференциального уравнения вида
30. Записать в общем виде уравнение Лагранжа.
31. Записать в общем виде уравнение Клеро.
32. Записать задачу Коши.
33. Записать формулировку теоремы Пикара.
34. Записать интегральное уравнение эквивалентное задаче Коши.
35. Что такое последовательное приближение Пикара?
36. Перечислить этапы доказательства теоремы Пикара.
37. Какие точки называются обыкновенными?
38. Какие точки называются особыми?
39. Привести примеры особых точек.
40. Что такое особое решение дифференциального уравнения?
41. Записать формулу для вычисления погрешности метода Пикара.
42. Перечислить численные методы решения задачи Коши
43. Привести пример уравнения Лагранжа.
44. Привести пример уравнения Клеро.
45. Привести пример уравнения с разделенными переменными.
46. Привести пример уравнения с разделяющимися переменными.
47. Привести пример уравнения однородного относительно *x* и *y.*
48. Привести пример уравнения в полных дифференциалах.
49. Привести пример уравнения линейного неоднородного.
50. Привести пример уравнения приводящегося к однородному относительно *x* и *y.*

# 

# ГЛАВА 2. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## Уравнения высшего порядка. Общие сведения

Все дифференциальные уравнения порядка выше 1-го называются *дифференциальными уравнениями высших порядков*. Уравнение порядка *n,* кроме производной , может содержать также и младшие производные, так что общий вид такого уравнения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.1) |

Или, если это возможно, в форме, разрешенной относительно старшей производной,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2) |

*Общим решением* дифференциального уравнения (2.2) называется решение, содержащее произвольные постоянные, которые можно подобрать таким образом, чтобы удовлетворить любым начальным условиям, то есть выражение вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.3) |

Как и для уравнений 1-го порядка, общее решение будет зависеть от произвольных постоянных. Поэтому для нахождения частного решения необходимо задать начальные условия:

|  |  |
| --- | --- |
| , ,…, | (2.4) |

Любое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных С1,С2,…,С*n*, называется *частным решением* дифференциального уравнения (2.1). Задачу нахождения частного решения дифференциального уравнения (2.2), удовлетворяющего начальным условиям (2.4), называют задачей Коши.

Для задачи Коши (2.2), (2.4) имеет место теорема Пикара, которая формулируется и доказывается аналогично теореме Пикара для дифференциального уравнения 1-го порядка (гл. 1). Существование и единственность решения задачи Коши геометрически означает, что через начальную точку (2.4) проходит единственная интегральная кривая.

Выражение вида , которое определяет неявно общее решение дифференциального уравнения, называется *общим интегралом* уравнения. Геометрически общее решение и общий интеграл дифференциального уравнения представляют собой *семейство интегральных кривых*. Частное решение дифференциального уравнения это *интегральная кривая*, проходящая через начальную точку (2.4).

Задача интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков является значительно более сложной, чем задача интегрирования уравнений 1-го порядка и далеко не всегда может быть сведена к последней. Тем не менее, кроме линейных уравнений, рассмотрению которых будет посвящена гл. 3, для всех остальных типов уравнений высших порядков основным методом интегрирования является понижение порядка [6].

## Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Рассмотрим три типа уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка [8].

**I**. Уравнение вида , где  - некоторая непрерывная функция.

После *n*-кратного интегрирования получается общее решение





Проинтегрировав таким образом требуемое число раз, получим общее решение уравнения.

**Пример.**

Решение.

Решить уравнение 

Интегрируем три раза и получаем общее решение





**II**. Дифференциальные уравнения *n*-го порядка, не содержащие неизвестной функции и младших производных до некоторого порядка (k-1) включительно

.

Порядок данного уравнения можно понизить на *k* единиц введением новой искомой функции *u=y*(*к*)(*x*).

Тогда

.

Пусть общим решением этого уравнения является функция

Возвращаясь к *y,* получим дифференциальное уравнение

а это и есть дифференциальное уравнение *k*-го порядка первого типа.

**Пример.** Решить уравнение 

Решение:

Положим тогда разделяем переменные и интегрируя, получаем 

Возвращаясь к *y,* получим уравнение первого типа 

интегрируем его два раза

**III**. Уравнения, в которых отсутствует независимая переменная *x:*



Понизить порядок этого уравнения на единицу удаётся путём замены .

Тогда



.

Заметим, что каждая производная  по  выражается через производные по порядка на единицу меньше.

**Пример.**

Решение.

Решить уравнение 

Замена  , тогда 

Уравнение примет вид

 или 

Тогда

1),

2)

Интегрируя последнее уравнение, имеем Возвращаясь к y, получим или разделив переменные получим *ydy=C2dx .*

Интегрируя, получаем общее решение

## Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением *n*-го порядка?
2. Дать определение общего решения дифференциального уравнения *n*-го порядка.
3. Дать определение частного решения дифференциального уравнения *n*-го порядка.
4. Что представляет собой геометрически общее решение дифференциального уравнения *n*-го порядка?
5. Что представляет собой геометрически частное решение дифференциального уравнения *n*-го порядка.
6. Записать задачу Коши для дифференциального уравнения *n*-го порядка.
7. Записать формулировку теоремы Пикара для дифференциального уравнения *n*-го порядка.
8. Какие типы дифференциальных уравнений высшего порядка допускают понижение порядка?
9. Метод решения дифференциального уравнения вида .
10. Метод решения дифференциального уравнения вида .
11. Метод решения дифференциального уравнения вида .
12. Какая замена используеся при решении дифференциального уравнения вида .
13. Привести пример дифференциального уравнения высшего порядка вида.
14. Привести пример дифференциального уравнения высшего порядка вида.
15. Привести пример дифференциального уравнения высшего порядка вида.

# 

# ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

## Основные понятия и определения

*Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение, в которое неизвестная функция и ее производные до *n*-го порядка входят в первой степени

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.1) |

Коэффициенты этого уравнения  и  :- непрерывные функции на отрезке [*a,b*], этого достаточно, чтобы выполнились все условия существования и единственности решения задачи Коши:

или



Таким образом, функция  непрерывна и удовлетворяет в каждой точке условию Липшица по *y*, значит, существует единственное решение уравнения (3.1), удовлетворяющее начальным условиям:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2) |

Если , уравнение (3.1) называется *однородным*. Чаще уравнение (3.1) записывается в виде.

Левая часть уравнения называется *линейным дифференциальным оператором* (ЛДО):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3) |

**Свойства линейного дифференциального оператора**

1. Постоянную C можно выносить за знак линейного дифференциального оператора: 

Докажем это:



1. Линейный дифференциальный оператор, примененный к сумме двух функций равен сумме результатов применения линейного дифференциального оператора к каждой из этих функций в отдельности:



Докажем это:



1. Результат применения линейного дифференциального оператора к линейной комбинации функций  с постоянными коэффициентами  равен линейной комбинации с теми же коэффициентами результатов применения линейного дифференциального оператора к каждой из функций 



Доказательство основывается на 1-м и 2-м свойствах.

## Линейные однородные дифференциальные уравнения. Свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений

Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.4) |

С использованием свойств ЛДО легко доказывают следующие теоремы, устанавливающие свойства решений ЛОДУ.

***Теорема 1.*** Еслиесть решение ЛОДУ (3.4) на отрезке [a,b], тотакже решение этого уравнения.

*Доказательство***.**

Пусть - решение уравнения (3.4), т.е.,  но тогда  - решение ЛОДУ (3.4).

***Теорема 2****.* Сумма двух решений  и  ЛОДУ (3.4) есть решение этого уравнения.

*Доказательство***.**

Если  - решение уравнения (3.4) ,  - решение (3.4), тогда  **-** решение уравнения (3.4).

***Теорема 3****.* Линейная комбинация частных решенийЛОДУ (3.4) с произвольными коэффициентами  является также решением этого уравнения.

*Доказательство.*

На основании теоремы 1 и теоремы 2.

***Теорема 4****.* Если ЛОДУ (3.4) имеет комплекснозначное решение, то его действительная и мнимая части, каждая в отдельности, также является решениями этого уравнения.

*Доказательство.*

Пусть функция  - решение ЛОДУ (3.4), т.е.  но тогда по свойствам ЛДО 1 и 2  Комплексная величина обращается в нуль тогда и только тогда, когда обращаются в нуль ее действительная и мнимая части:

 - решение (3.4),

 - решение (3.4).

## Линейная зависимость функций

## Определитель Вронского его применения

Пусть функции  определены на некотором отрезке [*a,b*].

Система функций  называется *линейно-зависимой* на отрезке [*a,b*], если найдутся коэффициенты  , не все равные нулю, такие что

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3.5) |

Система функций  называется *линейно независимой*, если равенство (3.5) выполняется только при нулевых коэффициентах.

**Пример 1.** Пусть дана система функций 

Но так как , то



Для этой системы нашлись ненулевые коэффициенты, при которых линейная комбинация из функций системы равна 0. Значит, система функции линейно зависима.

**Пример 2.** Пусть дана система функций .

Рассмотрим уравнение , если ,то это уравнение *n*-й степени, которое имеет n решений. Система функций линейно независима.

Если функции {*y1*(*x*), *y2*(*x*),..., *yn*(*x*)} дифференцируемы n-1раз, то из них можно построить определитель n-ого порядка, который имеет вид



Этот определитель также является функцией от *x* и обозначается



и называется *определителем Вронского* или *вронскианом* данной системы функций.

***Теорема****.* Если  линейно-зависимые на отрезке [*a,b*] функции, то их определитель Вронского тождественно равен нулю в каждой точке отрезка [*a,b*]



*Доказательство***.**

Пусть система функций - линейно зависима, т.е. 

Продифференцируем последнее равенство (*n*-1) раз. Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений относительно

Известно, что эта система имеет не нулевое решение (по условию теоремы), но эта система однородная, следовательно, имеет также нулевое решение. Отличие определителя системы от нуля является условием единственности решения. Поэтому ненулевое решение системы возможно только в том случае, когда определитель равен нулю.

Определитель системы состоит из коэффициентов при неизвестных  и равен нулю:



а это и есть определитель Вронского для функций  и он равен нулю, что и требовалось доказать.

## Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное однородное уравнение *n*-го порядка

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.6) |

здесь  - непрерывная на отрезке [*a,b*] функция.

***Теорема****.* Если  линейно независимые частные решения ЛОДУ (3.6) с непрерывными на отрезке [*a, b*] коэффициентами, то их определитель Вронского не может обращаться в нуль ни в одной точке этого отрезка.

*Доказательство.*

Доказательство от противного. Предположим, нашлась точка 

Составим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных , определителем которой являлся бы определитель Вронского для функций :

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3.7) |

Если , то система имеет множество решений, т.е. кроме нулевого решения () , являющиеся решениями системы (3.7).

Выберем эти  в качестве коэффициентов линейной комбинации

.

Функция *y*(*x*) будет являться решением ЛОДУ (3.6) (третье свойство решений ЛОДУ).

Частное решение, согласно первому уравнению системы (3.7), имеет вид



Тогда  в соответствии со вторым уравнением системы (3,7).

Рассматривая все производные *у*(*х,*) вплоть до (*n*-1), получаем .

Убедились, что функция *y*(*x*) является решением ЛОДУ (3.6), соответствующим начальным условиями 

Но ЛОДУ (3.6) с непрерывными коэффициентами в соответствии с теоремой Пикара, имеет единственное решение, определяемое начальными условиями.

Очевидно, что нулевым начальным условиям удовлетворяет тривиальное решение ЛОДУ .

В силу единственности решения уравнения (3.6) можно утверждать, что построенная нами функция 

Но это означает  - линейно зависимы, что противоречит условию теоремы и, следовательно, наше предположение о существовании точки  такой, что  неверно.

*Фундаментальной системой решений* (ФСР) линейного однородного дифференциального уравнения называются любые *n* линейно независимых решений данного уравнения [6].

***Теорема.*** Линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка с непрерывными коэффициентами на отрезке [*a,b*] имеет ФСР на этом отрезке.

*Доказательство***.**

Пусть дано ЛОДУ с непрерывными на отрезке [*a,b*] коэффициентами

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.8) |

Выберем  произвольных чисел, так чтобы составленный из них определитель не был равен нулю:

.

Сформулируем для уравнения (3.8) *n* задач Коши с начальными условиями:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3.9) |

Тогда в силу того, что для данного уравнения (3.8) справедлива теорема Пикара, любая задача Коши имеет единственное решение.

Обозначим:

 - решение первой задач Коши;

 - решение второй задачи Коши;

**. . .**

 - решение *n*-ой задачи Коши.

Таким образом, получили *n* функций , 

Теперь надо показать, что эта система функций является линейно независимой. Составим для ,  определитель Вронского:

.

Этот определитель в точке  будет равен  и не равен нулю

.

В силу произвольного выбора точки, определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке отрезка [*a,b*], следовательно, система функций линейно независима, поэтому образует ФСР ЛОДУ (3.8).

## Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение *n*- порядка:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.10) |

с непрерывными на [*a,b*] коэффициентами , .

***Теорема.*** Общим решением ЛОДУ (3.10) с непрерывными на [*a,b*] коэффициентами  является линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами частных решений ЛОДУ, образующих фундаментальную систему решений этого ЛОДУ.

*Доказательство***.**

Пусть {} - есть ФСР ЛОДУ (3.10).

Необходимо доказать, что функция

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.11) |

является общим решением ЛОДУ (3.10).

В соответствии с определением общего решения функция *y*(*x*) является общим решением ЛОДУ (3.10), если:

1. она является решением ЛОДУ (3.10),
2. имеется возможность указать такие числовые значения постоянных , при которых эта функция *y*(*x*)будет удовлетворять заданным начальным условиям.

Функция (3.11) - есть решение уравнения (3.10) по третьему свойству решений ЛОДУ.

Покажем, что для этой функции выполняется условие 2):

Зададим начальные условия:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3.12) |

Подставим функцию (3.11) в начальные условия (3.12):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.13) |

Таким образом, получили систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных , определителем которой является определитель Вронского линейно независимых функций , следовательно



Так как определитель не равен нулю, существуют единственное решение системы (3.13).

Следовательно, можно утверждать, что  и будут являться этим единственным решением системы (3.13).

Было показано, что существует возможность определения таких числовых значений , при которых функция (3.11) удовлетворяет заданным начальным условиям (3.12). Следовательно, функция (3.11) является общим решением дифференциальных уравнений (3.10).

**Пример.** Пусть дано ЛОДУ .

Тогда - его частные решения.

Проверим, будет ли система функций линейно независимой.

Составим определитель Вронского для этих функций



Следовательно,  - линейно независимые функции и образующие

ФСР ЛОДУ .

Общее решение ЛОДУ 

***Следствие из теоремы*.** Число линейно независимых частных решений ЛОДУ, образующих ФСР, равно порядку этого уравнения.

## Свойства решений линейного неоднородного дифференциального уравнения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.14) |

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ)

*n*-го порядка, здесь коэффициенты *pi*(*x*) (), *q*(*x*) непрерывные на отрезке  функции.

Дифференциальное уравнение вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.15) |

является однородным уравнением, соответствующим неоднородному

уравнению (3.15).

На основании свойств линейного дифференциального оператора доказываются свойства решений ЛНДУ.

1. Сумма функций , где  - решение ЛНДУ (3.15) и  - решение соответствующего ему ЛОДУ (3.15), есть решение ЛНДУ (3.14).

*Доказательство***.**



таким образом - решение ЛНДУ (3.15).

1. Если  являются решениями соответствующих ЛНДУ вида , тогда линейная комбинация  с произвольными постоянными коэффициентами , т.е. будет являться решением ЛНДУ вида  Свойство носит название *принцип суперпозиции решений.*

*Доказательство.*

Функция  решение ЛНДУ вид  .

1. Если комплекснозначная функция является решением

ЛНДУ вида то действительная часть - решение ЛНДУ а мнимая часть  - решение ЛНДУ .

*Доказательство*, аналогичное доказательству свойства 1, при этом надо помнить, что комплексное выражение равно нулю в том случае, когда равны нулю его действительная и мнимая части.

***Теорема о структуре общего решения ЛНДУ***. Общее решение ЛНДУ (3.14) с непрерывными на отрезке  коэффициентами и непрерывной правой частью равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (3.15) и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (3.14).

*Доказательство.*

Пусть - некоторое частное решение ЛНДУ (3.14), а система функций - ФСР соответствующего ЛОДУ (3.16). Необходимо доказать, что  - общее решение ЛНДУ (3.15).

Доказательство основывается на использовании свойств решений ЛНДУ и определении общего решения (аналогично теореме об общем решении ЛОДУ).

Доказанная теорема позволяет построить общее решение ЛНДУ по общему решению соответствующего ЛОДУ и какому-нибудь частному решению ЛНДУ.

В случае, если частное решение указать нельзя, но общее решение соответствующего ЛОДУ известно, можно проинтегрировать ЛНДУ методом вариации постоянных 

## Интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения методом вариации постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.16) |

здесь (), - непрерывные на отрезке функции. Пусть известно общее решение ЛОДУ

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Метод вариации постоянных состоит в том, что решение находится в виде общего решения соответствующего ЛОДУ, но  считаются зависящими от *х*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.17) |

Для того, чтобы найти неизвестные функции , необходимо найти и эти функции подставить в уравнение (3.16).

Найдем :



Положим, тогда 

и вновь  и  и т.д. до (*n*-1*)*-й производной включительно:

;

.

Но  здесь приравнивать к нулю вторую сумму нельзя, так как *n* начальных условий уже исчерпано.

Подставим в уравнение (3.16), получим

.

Вторая сумма равна нулю, так как  - решение ЛОДУ. Следовательно, имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных :

Эта система линейных алгебраических уравнений неоднородна. Определитель этой СЛАУ не равен нулю, так как функции образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.16), следовательно



Система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение - .

Вычисляя квадратуры, получим функции .

Подставляя найденные функции в формулу (3.18), получим

где первое слагаемое - общее решение ЛОДУ, второе - частное решение ЛНДУ.

**Пример.** Решить ЛНДУ .

Рассмотрим соответствующее ЛОДУ: 

Общее решение ЛОДУ: .

Частное решение ЛНДУ запишем в виде .

Найдем ,:

,



Подставим и в ЛНДУ и получим:

.

Имеем СЛАУ относительно неизвестных 

.

тогда и соответственно

.

Общее решение ЛНДУ имеет вид

.

## Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-порядка

## с постоянными коэффициентами

***Понятия и определения*.** Пусть дано линейное однородное дифференцируемое уравнение *n*-го порядка

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.18) |

Здесь *a1, a2, … , an* - постоянные коэффициенты.

Уравнение (3.18) можно переписать с использованием ЛДО в виде

Решение уравнения (3.18) будем искать в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.19) |

.

где *λ*- неизвестная величина, для определения которой следует подставить функцию (3.19) в уравнение (3.18), при этом получаем уравнение вида

или  
 .

Таким образом, подстановка в уравнение (3.18) приводит его к виду

|  |  |
| --- | --- |
| В последнем равенстве | (3.20) |

принято называть *характеристическим уравнением* (ХУ) дифференциального уравнения (3.18).

Таким образом, было показано, что если функция *eλx* является решением дифференциального уравнения (3.18), то *λ* является корнем характеристического уравнения, и наоборот [7].

Следует помнить, что:

1. Число λ=λ1 называют *простым корнем характеристического*

*уравнения* (3.20), если *P*(λ) можно записать в виде где .

1. Число *λ1* называют *корнем кратности k характеристического*

*уравнения* (3.20), если многочлен *P*(λ) можно записать в виде

где

1. Характеристическое уравнение должно иметь *n* решений.

***Случай различных действительных корней характеристического уравнения*.** Пусть все корни характеристического уравнения (3.20) действительны и различны, т.е. , .

В этом случае имеем *n* различных частных решений уравнения (3.18)

... ;

Покажем, что эти функции линейно независимы, т.е. образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.18). Определитель Вронского этой системы

Так как все корни характеристического уравнения различны, а функция *e*λ*x* не обращается в нуль*,* то

Из этого следует, что  линейно независимые, а значит, образуют ФСР ЛОДУ (3.18).

Общее решение может быть записано в виде:

**Пример.** Решить дифференциальное уравнение

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид

Его корни

Частные решения образующие ФСР: 

Общее решение дифференциального уравнения 

***Случай, когда среди корней характеристического уравнения имеются комплексные корни*.** Пусть - корень характеристического

уравнения (3.20).

Комплексные корни могут появляться только парами, т.е. .

Следовательно,- решения уравнения (3.18). Применяя известную формулу Эйлера для первой функции, имеем

По свойству 4 решений ЛОДУ , - есть решения уравнения (3.18).

Проведем аналогичные действия для второй функции:

и получим  , .

Функции *y3, y4* - *линейные комбинации* функций *y1, y2*, т.е. являются линейно-зависимыми. Поэтому рассмотрение корня Xарактеристического уравнения никаких новых решений не дает, т.е. паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения соответствует пара решений уравнения (3.18) вида:

Если при этом все остальные корни являются действительными и различными, то ФСР будет иметь вид

Общее решение уравнения (3.18) записывается следующим образом:

**Пример.** Решить дифференциальное уравнение

Решение.

Характеристическое уравнение имеет корни

Частные решения уравнения, образующие ФСР: 

Общее решение.

***Случай кратных корней характеристического уравнения*.**

Пусть - корень кратности *k*1 характеристического уравнения (3.20) , все остальные простые действительные, тогда различных корней характеристического уравнения будет меньше, чем *n* и частных решений уравнения (3.18), соответствующих различным корням, будет меньше, чем *n*:

**

Но для построения общего решения ЛОДУ на основании теоремы об общем решении, необходимо располагать *n* решениями.

Где взять остальные (*n-p*)решений? На основании определения кратности корня

Подставим функцию *y=* в уравнение (3.18), для простоты записи положим λ1 = λ*,* тогда

Продифференцируем последнее равенство *s* раз по λс использованием формулы Лейбница:  т.е. .

Для левой части равенства  .

После *s*-кратного дифференцирования имеем

Вернемся в последнем равенстве к *λ1*, тогда:

 -решение уравнения (3.18);

 - решение

уравнения (3.18);

 - решение уравнения (3.18);

**. . .**

 -решение уравнения (3.18);

 - не является решением уравнения (3.18).

Таким образом, решениями дифференциального уравнения (3.18), соответствующими корню , кратности *k*1, являются функции:, .

**Пример.** Решить дифференциальное уравнение 

Решение.

Характеристическое уравнение ;

имеет =1 корень кратности 3.

Общее решение 

## Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n* -го порядка

## с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.21) |

где  - const.

Наряду с уравнением (3.21) рассмотрим соответствующее ему ЛОДУ

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Характеристическое уравнение для уравнения (2) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
| *.* |  |

В общем случае интегрирование уравнения (3.21) может быть осуществлено методом вариации произвольных постоянных.

В случае ЛНДУ с постоянными коэффициентами, помимо этого метода, может быть применен метод неопределенных коэффициентов (метод подбора).

***Метод подбора****.* По рассмотренной теореме общее решение неоднородного уравнения (3.21) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Отыскание общего решения соответствующего однородного уравнения осуществляется по изложенным правилам. Таким образом, задача интегрирования уравнения (3.21) сводится к отысканию частного решения *yч.н* неоднородного уравнения. Для правых частей специального вида частное решение находится так называемым *методом подбора****.*** Общий вид правой части *q*(*х*)уравнения (3.21), при котором возможно применить метод подбора, следующий:

*q*(*х*) *=е*α*x*[*Рe* (*x*)cosβ*x + Qm*(*x*)sinβ*x*],

где *Рe(х*) и *Qk*(*x*)суть многочлены степени *e* и *m* соответственно. В этом случае частное решение *yч.н*. уравнения (3.21) ищется в виде:

*yч.н = xse*α*x[k*(*x*)cosβ*x + k*(*x*)sinβ*x],*

где *k = max*(*m, e*)*,Pk*(*x*) и *Qm*(*x*)– многочлены от *x k*-й степени общего вида с неопределенными коэффициентами, а *s* – кратность корня λ*=*α*+i*β характеристического уравнения(если α *± i*β не является корнем характеристического уравнения, то *s=*0).

Для нахождения частного решения ЛНДУ используется табл. 1, в которой по виду правой части ЛНДУ, т.е. функции *q*(*x*), определяется вид частного решения.

**Таблица 1.**

Сводная таблица видов частных решений для различных видов правых частей [4], [7]

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№**  ***п*/*п*** | **Правая часть дифференциального уравнения** | **Корни характеристического уравнения** | **Виды частного решения** |
| 1 | *Pm*(x) | Число 0 не является корнем характеристического уравнения | *m*(*x*) |
| Число 0 — корень ха­рактеристического уравнения кратности s | xs*m*(*x*) |
| 2 | *Pm*(x)*e*α*x* | Число α не является корнем характеристического уравнения | *m*(*x*)*e*α*x* |
| Число α является корнем характеристического уравнения кратности *s* | xs*m*(*x*) *e*α*x* |
| 3 | *Pn*(*x*)cosβ*x + Qm*(*x*)sinβ*x* | Числа *±i*βне являются корнями характеристического уравнения | *k*(*x*)cosβ*x + k*(*x*)sinβ*x* |
| Числа *±i*βявляются корнями характери­стического уравнения кратности s | *xs(k*(*x*)cosβ*x + k*(*x*)sinβ*x)* |
| 4 | *eαx*[*Pn*(*x*)cosβ*x + Qm*(*x)*sinβ*x]* | Числа α*±i*βне являются корнями харак­теристического уравнения | *e*α*x*[k(*x*)cosβ*x + k*(*x*)sinβ*x*] |
| Числа α*±i*β являются корнями харак­теристического уравнения | *e*α*x*[*k*(*x*)cosβ*x + k*(*x*)sinβ*x*]*xs* |

**Пример 1.**Найти общее решение уравнения *y’’’–y’’*=12*x2*+6*x*.

Решение.

Характеристическое уравнение λ3-λ2=0 имеет корни λ1= λ2=0 и λ3=1, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения будет

*yо.о= С*1*+С*2*x+С*3*e,x*

так как число 0 есть двукратный корень характеристического уравнения, т.е. частное решение надо искать в виде:

*уч.н=x*2(*A*1*x*2*+A*2*x+A*3)*=A*1*x*4*+A*2*x*3*+A*3*x*2*.*

Подставляя выражение для *y*ч.н в данное уравнение будем иметь:

*-*12*A*1*x*2+(24*A*1*-*6*A2*)*x+(*6*A*2*-*2*A*3*)=*12*x*2*+*6*x,*

откуда

-12*А*1*=*12*,*

24*A*1*-*6*A*2*=*6*,*

6*A*2*-*2*A*3*=*0*,*

Эта система имеет решение: *A*1*=-*1*, A*2*=-*5*, A*3*=-*15, а значит *yч.н=-x*4*-*5*x*3*-*15*x*2*.*

общее решение данного уравнения:

*Yо.н= С*1*+С*2*x+C*3*ex-x*4*-*5*x*3*-*15*x*2*.*

**Пример 2.**

Найти общее решение уравнения *y’’*+у'=4*x*2*ex*.

Решение.

Характеристическое уравнение *λ*2*+ λ=*0 имеет корни *λ*1*=*0 и *λ*2*=-*1. Значит, общее уравнение *yо.о* соответствующего однородного уравнения будет:

*Yо.о=С*1*+С*2*e-x,*

так как а=1 не является корнем характеристического уравнения, *частное*

*решение* уч.н неоднородного уравнения ищем в виде (см. табл.1, случай 2)

уч.н= (*A*1*x*2+*A*2х+*A*3) *ex*

Подставляя его в исходное уравнение и сокращая обе части уравнения на *ex*, будем иметь:

2*A*1*x*2*+*(6*A*1*+*2*A*2)*x+*2*A*1*+*З*A*2*+*2*A*3*=*4*x*2*,*

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой частях равенства, получаем линейную систему уравнений для нахождения коэффициентов *A*1*, A*2*, A*3:

2*A*1*=4,*

6*A*1*+*2*A*2*=*0

2*A*1*+*З*A*2*+*2*A3=*0*,*

решая которую находим *A*1*=*2*, A*2*= -*6*, A*3*=*7, так что

Уч.н*=*(2*x*2-6x+7) *ex* ,

Общее решение данного уравнения:

y(x)=C1+С2е-x+(2x2–6x+7) *ex*

**Пример 3*.*** Найти общее решение уравнения у"+10у'+25у = 4е-5x

Решение.

Характеристическое уравнение 10х +25=0 имеет двукратный корень λ*1*=λ*2*= -5, поэтому

Уo.o=(C1+С2 х) е-5x

так как *а=-5* является корнем характеристического уравнения кратности s=2, то *частное решение* уч.н неоднородного уравнения ищем в виде (см. табл.1, случай 2)

y*ч.н* = *Вx*-5*x*, тогда *у'ч.н* = *В* (2x-5x2)е-5x y*"*ч.н=B(2-20x+25x2)e-5x

Подставляя выражения для уч.н, у'ч.н,.у"ч.н в исходное уравнение, получаем

2*B*e-5*x*=4*e*-5*x*, откуда В=2 и, значит,yч.н=2х2e-5x.

Общее решение данного уравнения

y*(x)=(С1+С2x*)*e-5x+2x2е-5x*

## Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением

*n*-го порядка?

1. Записать линейный дифференциальный оператор (ЛДО).
2. Перечислить свойства ЛДО.
3. Перечислить свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений *n*-го порядка (ЛОДУ).
4. Какие функции называются линейно независимыми?
5. Какие функции называются линейно-зависимыми?
6. Записать определитель Вронского для системы функций.
7. Чему равен определитель Вронского для линейно-зависимых функций?
8. Что такое фундаментальная система решений (ФСР) для ЛОДУ?
9. Сколько независимых частных решений входит в ФСР ЛОДУ?
10. Каким свойством обладает ФСР ЛОДУ?
11. При каких условиях ЛОДУ имеет ФСР на заданном отрезке?
12. Какова структура общего решения ЛОДУ?
13. Какие условия должны выполняться, чтобы функция  была общим решение ЛОДУ?
14. Записать линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) в общем виде.
15. Свойства решений ЛНДУ.
16. Какова структура общего решения ЛНДУ?
17. Каким метод можно найти частное решение ЛНДУ, если известно общее решение соответствующего ЛОДУ?
18. Записать в общем виде ЛОДУ с постоянными коэффициентами.
19. В каком виде отыскивается решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами?
20. Что представляет собой характеристическое уравнение для ЛОДУ с постоянными коэффициентами?
21. Как записывается ФСР ЛОДУ с постоянными коэффициентами в случае, когда корни характеристического уравнения простые и действительные?
22. Как записывается ФСР ЛОДУ с постоянными коэффициентами в случае, когда корни характеристического уравнения кратные и действительные?
23. Как записывается ФСР ЛОДУ с постоянными коэффициентами в случае, когда корни характеристического уравнения простые и комплексные?
24. Как записывается ФСР ЛОДУ с постоянными коэффициентами в случае, когда корни характеристического уравнения кратные и комплексные?
25. Каким методом может быть найдено частное решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами?
26. Что анализируется в ЛНДУ при использовании метода подбора для нахождения его частного решения?
27. Записать ФСР ЛОДУ и общее решение ЛОДУ, если корни характеристического уравнения:

-1, 1, 2, ±i, ±i, 1

1. Записать ФСР ЛОДУ и общее решение ЛОДУ, если корни характеристического уравнения:

1, 2, 2, 2 ±i, ±i

1. Записать ФСР ЛОДУ и общее решение ЛОДУ, если корни характеристического уравнения:

-1, 2, 2, ±i, ±i, 2 ±i

# 

# ГЛАВА 4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## Основные понятия и определения

В случае нескольких неизвестных функций одного аргумента *x* оставляют совокупность уравнений, образующих систему дифференциальных уравнений.

В общем случае система дифференциальных уравнений имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.1) |

здесь - независимая переменная.

Если  - максимальный порядок производной неизвестной функции ,

 - максимальный порядок производной неизвестной функции ,

**. . .**

 - максимальный порядок производной неизвестной функции ,

то называют *порядком системы* (4.1) относительно неизвестных функций 

Если уравнения системы (4.1) удается разрешить относительно старших производных неизвестных функций, то система (4.1) преобразуется к виду

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2) |

Система (4.2) – *каноническая система*, разрешенная относительно старших производных.

Любую каноническую систему (4.2) можно привести к так называемому *нормальному виду Коши*, путем введения дополнительных неизвестных функций. В результате получаем систему из дифференциальных уравнений, каждое из которых разрешено относительно первой производной неизвестной функции *yi*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3) |

*Решением* системы дифференциальных уравнений называется совокупность функций определенных и непрерывно дифференцируемых на рассматриваемом отрезке изменения *x*, которые, будучи подставлены в уравнения системы (4.3), обращают их в тождество. Используя векторную запись, получим

, , .

И тогда нормальную систему дифференциальных уравнений можно записать следующим образом

.

*Задачей Коши* для системы дифференциальных уравнений (4.3) называется задача построения такого решения этой системы, которое удовлетворяет наперед заданным начальным условиям:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (4.4) |

Здесь  - заданные числа, причем  задано из интервала (*a,b*), на котором находят решение.

Геометрически решение задачи Коши интерпретируется как интегральная кривая в (*n*+1)-мерном пространстве, проходящая через фиксированную точку .

***Теорема Пикара для системы дифференциальных уравнений*.** Пусть правые части уравнений системы (4.3), т.е. функции, определены и непрерывны в некоторой замкнутой ограниченной окрестности начальной точки  и в этой окрестности удовлетворяет условию Липшица, а именно, существует постоянная Липшица такая, что



Тогда существует единственное решение системы (4.3), удовлетворяющее начальным условиям (4.4).

Принцип доказательства тот же, что и в теореме Пикара для дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Точка с координатами  называется *обыкновенной точкой*, если существует единственная интегральная кривая, проходящая через эту точку.

Пусть все точки некоторой области *D* являются обыкновенными, тогда совокупность функций

или  в векторной форме называется *общим решением* системы (4.3), если выполняются два условия:

1. при любых значениях  функции

представляют собой решение системы (4.3),

1. для любой начальной точки с координатами можно подобрать такие значения постоянных , при которых данные функции представляют собой частное решение системы (4.3), проходящее через эту точку.

## Интегрирование нормальных систем дифференциальных уравнений методом исключения неизвестных

Этот метод называется иногда методом сведения системы дифференциальных уравнений к дифференциальному уравнению высшего порядка.

Этот метод является наиболее универсальным методом интегрирования нормальных систем дифференциальных уравнений.

Из уравнений системы путем дифференцирования исключают все неизвестные функции кроме одной, относительно которой получают одно дифференциальное уравнение *n*-го порядка.

Полученное уравнение интегрируют известными способами. В результате находим одну неизвестную функцию. Остальные неизвестные функции находят по возможности без интегрирования из формул, полученных при исключении неизвестных функций [2].

**Пример.** Найти решение нормальной системы дифференциальных уравнений.

Решение.





** -** найдена первая неизвестная функция.

Подставляем найденную функцию во второе уравнение системы и получаем:

Найдена вторая неизвестная функция, тем самым найдено решение заданной нормальной системы дифференциальных уравнения.

## Линейные системы дифференциальных уравнений

*Линейной системой* дифференциальных уравнений называют систему таких уравнений, в которых неизвестные функции и их производные входят линейно [2].

Таким образом, нормальная линейная система запишется в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.5) |

Введем обозначение

,,

тогда систему (4.5) можно записать в матричной форме

|  |  |
| --- | --- |
| . | (4.6) |

Для того чтобы система (4.5) с заданными начальными условиями имела единственное решение, достаточно, чтобы функции *aij*(*x*)*, i, j = и* , *i = ,* были непрерывными на рассматриваемом отрезке [*a,b*].

## Свойства решений линейных однородных систем дифференциальных уравнений

Линейная система (4.6) в случае, если тождественно равна 0, называется *линейной однородной системой дифференциальных уравнений* (ЛОСДУ*).*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.7) |

где *aij*(*x*) - непрерывные на [*a,b*] функции.

Такие системы обладают свойствами, которые могут быть сформулированы в виде следующих теорем.

***Теорема 1.*** Если вектор-функции  является решением линейной однородной системы дифференциальных уравнений (4.7), то вектор-функция , где *С* - произвольная постоянная, также является решением этой системы.

*Доказательство.*

Пусть  - решение системы (4.7), тогда

Покажем, что  также является решением системы (4.7).

Подставим в систему (4.7) вектор-функцию, получим:



Следовательно, если  - решение системы (4.7), то и  - также решение системы (4.7).

***Теорема 2.*** Сумма двух решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений есть также решение этой системы.

*Доказательство.*

Пусть  - вектор-функции, являющиеся решением системы (4.7).

Доказательство аналогично доказательству второго свойства решений ЛОДУ *n*-го порядка, рассмотренного в гл.3.

***Теорема 3.*** Линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами решений  ЛОСДУ является решением этой системы.

*Доказательство***.**

Пусть  есть решения системы (4.7). Покажем, что функцияявляется решением системы (4.7).

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству свойства 3 решений ЛОДУ *n*-го порядка, рассмотренного в гл.3.

***Теорема 4.*** Пусть линейная однородная система дифференциальных уравнений (4.7) имеет комплексное решение: , тогда действительная  и мнимая части этого комплексного решения в отдельности также являются решениями этой системы. Здесь  и  - действительные вектор-функции.

*Доказательство***.**

Доказательство аналогично доказательству четвертого свойства решений ЛОДУ *n*-го порядка, рассмотренного в гл.3.

## Фундаментальная система решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений

Система вектор-функций{}называется *линейно-зависимой*, если существуют такие  коэффициенты не все равные нулю, что выполняется тождество

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Если данное тождество выполняется лишь при нулевых значениях коэффициентов , то система вектор-функций{} называется *линейно независимой*.

Определитель Вронского для вектор-фукций{}имеет вид



Этот определитель также является функцией от *x* и обозначается



***Теорема.*** Если система вектор-функций {}линейно зависима на [*a,b*], то определитель Вронского



для данной системы тождественно равен нулю в каждой точке отрезка [*a,b*].

*Доказательство.*

По определению линейно-зависимых вектор-функций условие теоремы означает, что

.

Это векторное тождество фактически представляет собой систему из *n* уравнений

Данная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  имеет по условию теоремы ненулевое решение и нулевое решение (так как система однородная), т.е. не единственное решение.

Отсюда следует, что определитель этой системы равен нулю



Следствие**.** Любая совокупность n линейно независимых решений ЛОСДУ называется фундаментальной системой (ФСР) решений этой ЛОСДУ.

***Теорема 6.***

Линейная однородная система дифференциальных уравнений



с непрерывными на [*a,b*] коэффициентами имеет на этом отрезке фундаментальную систему решений.

*Доказательство.*

Рассмотрим *n* задач Коши вида:

, где , где

Каждая из этих n задач Коши, в силу выполнения условий теоремы Пикара (коэффициенты  непрерывные), имеет единственное решение:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) | , |
| 2) | , |
| n) | *,* |

Определитель Вронского для построенных вектор-функций  в начальной точкеимеет вид

.

т.е. система вектор-функций в точке  линейно независима. В силу произвольности выбора начальной точки последнее означает, что вектор-функции линейно независимы на отрезке [*a,b*], следовательно, образуют ФСР ЛОСДУ на этом отрезке.

## Теорема о структуре общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений

***Теорема.*** Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.8) |

с непрерывными на отрезке  коэффициентами равно линейной комбинации с произвольными постоянными частных решений ЛОСДУ, образующих ФСР данной ЛОСДУ.

*Доказательство.*

Пусть вектор-функции{}образуют ФСР ЛОСДУ (4.8).

Тогда убедимся, что общее решение (4.8) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.9) |

Покажем, что:

1) является решением системы (4.8),

2) возможно подобрать  такие, что  будет удовлетворять наперед заданным начальным условиям

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.10) |

Функция , построенная по формуле (4.9), является решением (4.8) в силу третьего свойства решений ЛОСДУ. Покажем, что выполняется второе условие. Назначим начальные условия:



где  - произвольные числа, .

Подставим функцию (4.9) в эти начальные условия



Это векторное равенство эквивалентно системе



Данная неоднородная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  имеет определитель (определитель Вронского для вектор-функций), который отличен от 0, так как система вектор-функций  линейно независима. Следовательно, эта СЛАУ имеет единственное решение.

Значит можно определить значения , при которых вектор-функция (4.9) будет являться решением системы (4.8), удовлетворяющим заданным начальным условиям (4.10).

Следовательно, функция (4.9) является общим решением системы (4.8).

## Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим ЛНСДУ

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.11) |

где матрица A с элементами и  – вектор непрерывных на отрезке  функций.

Для нахождения общего решения системы (4.11) рассматривается соответствующая ей однородная система

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.12) |

Решения системы (4.11) обладают свойствами, устанавливаемыми следующими теоремами.

***Теорема 1****.*Сумма какого-нибудь частного решения ЛНСДУ (4.11) решения соответствующей однородной системы и есть также решение ЛНСДУ (4.11) .

*Доказательство***.**

Пусть  вектор-функция – решение системы (4.12) 

а вектор-функция  – решение системы (4.11) 

Покажем, что - решение системы (4.11).

Для этого подставим в уравнение (4.11)

.

При подстановке получили тождество, значит, эта вектор-функция является решением системы (4.11).

***Теорема 2****.* Решение ЛНСДУ вида

с непрерывными на [*a,b*] коэффициентами равно сумме вектор-функций , являющихся решениями соответственно ЛНСДУ вида

*Доказательство***.**

Доказательство аналогично доказательству принципа суперпозиции решений ЛНДУ.

***Теорема о структуре общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений***

***Теорема****.* Общее решение ЛНСДУ с непрерывными на отрезке на  коэффициентами *aij(x), i,j=* и непрерывными правыми частями  равно сумме общего решения соответствующей однородной системы (4.12) и какого-нибудь частного решения ЛНСДУ (4.11).

*Доказательство***.**

Пусть{}образуют ФСР ЛОСДУ (4.8), тогда нужно показать, что вектор-функция



где вектор-функция  решение неоднородной системы, является общим решением ЛНСДУ (4.11).

Доказательство аналогично доказательству теоремы о структуре общего решения ЛНДУ.

## Интегрирование линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений методом вариации постоянных

Рассмотрим линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.13) |

с непрерывными на отрезке [a,b] коэффициентами *aij(x), i,j=* и непрерывными правыми частями, и соответствующую ей однородную систему

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.14) |

Если известна ФСР системы (4.14), но неизвестно частное решение  системы (4.13), тогда частное решение системы (4.13) можно найти методом вариации постоянных, который заключается в следующем: решение ЛНСДУ (4.13) отыскивается в том же виде, что и общее решение ЛОСДУ (4.14), но в предположении, что постоянные  – дифференцируемые функции от *x*, т.е. решение ЛНСДУ (4.13) будет иметь вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.15) |

где  - функции, образующие фундаментальную систему решений ЛОСДУ (4.14).

Для определения вновь введенных неизвестных функций  подставим функции (4.15) и производные функций (4.15) в линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений (4.13).

Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных 

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.16) |

Определителем системы (4.16) является определитель Вронского для линейно независимой системы функций {}, образующих ФСР ЛОСДУ (4.14), следовательно, он не равен нулю. Последнее означает, что существует единственное решение системы (4.16). Имея , легко найти , а затем частное решение ЛНСДУ (4.13) вида (4.15).

Пример***.*** Методом вариации постоянных решить систему:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Замечание*.* Здесь независимая переменная – *t*, неизвестные функции *x*(*t*)*, y*(*t*)*.*

Решение*.*

Сначала решим соответствующую однородную систему

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Из второго уравнения ЛОСДУ имеем *,* так что .

Подставим эти выражения для х и в первое уравнение ЛОСДУ:

общее решение этого уравнения

Так как , то будем иметь:

Общее решение однородной системы есть

Решение неоднородной системы ищем в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Подставив выражения для *x* и *y* в ЛНСДУ и приведя подобные члены, получим

откуда

и .

Интегрируя, найдем

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где *C*1 и *С*2 - произвольные постоянные. Подставляя в выражения для *x* и *y*, получим общее решение системы ЛНСДУ

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

## с постоянными коэффициентами

Линейная система дифференциальных уравнений (ЛСДУ) вида



коэффициенты в уравнениях которой – постоянные числа, называются ЛСДУ с постоянными коэффициентами.

Линейную систему дифференциальных уравнений (ЛСДУ) с постоянными коэффициентами, как и любую линейную систему, можно проинтегрировать методом исключения неизвестных.

В результате применения этого метода исходная система сводится к одному дифференциальному уравнению высшего порядка, которое будет в этом случае также линейным и также с постоянными коэффициентами.

Общее решение линейных систем с постоянными коэффициентами тоже можно построить *методом Эйлера*.

Рассмотрим этот метод в применении к системе трех линейных дифференциальных уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.17) |

Замечание*.* Здесь независимая переменная –*t*, неизвестные функции *x*(*t*)*, y*(*t*)*, z(t).*

Решение системы (4.17) ищем в виде

|  |  |
| --- | --- |
| *,, ,* λ*,* μ*,* ν и *r –* const | (4.18) |

Подставляя (4.18) в (4.17) и сокращая на , получаем систему уравнений для определения λ, μ, ν:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.19) |

Система (4.19) имеет ненулевое решение, когда ее определитель ∆ равен нулю.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.20) |
|  |  |

Уравнение (4.20) называется *характеристическим*.

Пусть корни , и характеристического уравнения - вещественные и различные. Подставив в (4.19) вместо *r* число и решив систему (4.19), получим числа , , . Затем положим в (4.19) и получим числа , , и, наконец, при получим , , . Соответственно трем наборам чисел λ, μ и ν получим три частных решения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *,*  *,*  *,* | *,*  *,*  *,* | *,*  *,*  *.* |

Общее решение системы (4.17) имеет вид

*,*

*,*

*.*

**Пример 1*.*** Решить систему:

Решение.

Составляем характеристическое уравнение

или .

Корням , , соответствуют числа

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ,  ,  , | ,  ,  , | ;  ;  . |

Выписываем частные решения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *,*  *,*  *,* | *,*  *,*  *,* | *,*  *,*  *.* |

Общее решение системы:

*,*

*,*

*.*

**Пример 2**. Решить систему

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.21) |

Решение.

Характеристическое уравнение

или

имеет кратный корень .

Решение следует искать в виде

|  |  |
| --- | --- |
| *, .* | (4.22) |

Подставляя (4.22) в первое уравнение системы (4.21), получаем

|  |  |
| --- | --- |
| *.* | (4.23) |

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой части (4.23), получаем:

*;*

*,*

откуда

|  |  |
| --- | --- |
| *, .* | (4.24) |

Величины и остаются произвольными. Обозначая их соответственно через и, получаем общее решение системы (4.21):

*; .*

Замечание*.* Легко проверить, что если (4.22) подставить во второе уравнение системы (4.21), то получим тот же результат (4.24). В самом деле, из равенства

получаем два соотношения для определения и через и :

*,*

*,*

откуда =, .

## Контрольные вопросы

1. Записать систему дифференциальных уравнений в общем виде.
2. Когда составляют систему дифференциальных уравнений?
3. Что такое каноническая система дифференциальных уравнений?
4. Что такое система дифференциальных уравнений нормального вида Коши?
5. Записать нормальную систему дифференциальных уравнений в векторной форме.
6. Записать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.
7. Записать формулировку теоремы Пикара для нормальной системы дифференциальных уравнений.
8. Какая совокупность вектор-функций называется линейно независимой?
9. Какая совокупность вектор-функций называется линейно-зависимой?
10. Что такое определитель Вронского для вектор-функций?
11. Записать в матричной форме линейную однородную систему дифференциальных уравнений (ЛОСДУ) в общем виде.
12. Записать в матричной форме линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений (ЛНСДУ) в общем виде.
13. Что такое фундаментальная система решений ЛОСДУ?
14. Чему равен определитель Вронского для совокупности линейно-зависимых вектор-функций?
15. Перечислить свойства решений ЛОСДУ.
16. Чему равно общее решение ЛОСДУ?
17. Чему равно общее решение ЛНСДУ?
18. Каким методом можно найти частное решение ЛНСДУ?
19. Перечислить свойства решений ЛНСДУ.
20. Назвать основной (универсальный) метод решения нормальных систем дифференциальных уравнений.
21. Каким методом находится решение ЛОСДУ с постоянными коэффициентами?

# 

# ГЛАВА 5. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

# Уравнения в частных производных первого порядка

**Дифференциальными уравнениями с частными производными** называются дифференциальные уравнения, в которых неизвестные функции являются функциями более чем одной независимой переменной.

Пусть искомая функция Z зависит от нескольких независимых переменных: *x1,..., xn , n  ≥ 2*.

Наиболее общее уравнение с частными производными первого порядка с *n* независимыми переменными может быть записано в виде

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.1) |

а в случае двух независимых переменных

|  |  |
| --- | --- |
| . | (5.2) |

Решить задачу интегрирования уравнения с частными производными – значит, найти все решения данного уравнения.

Естественно ожидать, что решений будет бесконечное множество. На это указывает хотя бы то обстоятельство, что обыкновенное дифференциальное уравнение, являющееся частным случаем уравнения с частными производными при *n =1*, имеет бесконечное множество решений, соответствующих различным значениям произвольной постоянной.

Поэтому можно ожидать бесконечного числа решений от уравнения, содержащего более одной независимой переменной. Предварительные указания на характер произвольных элементов, входящих в решение уравнения с частными производными можно получить из рассмотрения отдельных частных случаев.

**Пример 1.** . В это уравнение входит только частная производная , при вычислении которой *y* рассматривается, как постоянный параметр. Таким образом, при постоянном *y* это уравнение можно рассматривать, как обыкновенное дифференциальное уравнение линейное относительно *z*. Его общее решение , где – произвольная функция в общем случае зависящее от *y*.

**Пример 2.**  – уравнение в частных производных второго порядка. Записав его в виде , убеждаемся в том, что не зависит от *x* и мы можем положить её равной произвольной функции от *y*: . Интегрируем это равенство по *y* и замечая, что постоянная интегрирования есть постоянная по отношению к *y* , т.е. может быть любой функцией от *x* и что есть опять произвольная функция от *y*, получим общее решение z= . Таким образом, в этом случае общее решение зависит от двух произвольных функций.

**Линейным уравнением с частными производными** называется уравнение

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.3) |

где z - неизвестная функция независимых переменных *x1, x2 ,..., xn*, а

*ai (x1,..., xn ), i =* - заданные функции.

Если в уравнении (5.3) функции *a1,...,an , b* зависят также и от *z* , то уравнение называется **квазилинейным**.

Если b 0, то уравнение называется **однородным**

|  |  |
| --- | --- |
| . | (5.4) |

Задача интегрирования линейного однородного уравнения равносильна (эквивалентна) задаче интегрирования так называемой характеристической системы

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5) |

Оказывается, что всякий первый интеграл системы (5.5) является решением уравнения (5.4) и обратно, всякое решение уравнения (5.4) является первым интегралом системы (5.5). При этом, если n – 1 первых интегралов

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6) |

независимы, то общим решением линейного однородного уравнения с частными производными (5.4) является

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.7) |

где Ф - произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Решение *z* линейного неоднородного и квазиоднородного уравнения ищется в неявном виде

|  |  |
| --- | --- |
| . | (5.8) |

При этом функция *V* оказывается решением однородного линейного уравнения с (n+1) независимыми переменными

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.9) |

характеристическая система которого

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.10) |

оказывается характеристической системой исходного уравнения (3).

Итак, интеграл квазилинейного уравнения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.11) |

зависящий от произвольной функции, может быть получен следующим методом:

интегрируем вспомогательную систему уравнений

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.12) |

и, найдя два независимых первых интеграла этой системы

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (5.13) |

получаем искомый интеграл в виде

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.14) |

где Ф - произвольная функция.

Уравнение интегральной поверхности того же уравнения, проходящей через заданную линию, определяемую уравнениями

|  |  |
| --- | --- |
| Ф1(*x, y, z*) = 0 и Ф2 (*x, y, z*) = 0 | (5.15) |

можно найти, взяв найденную функцию Ф (5.14) не произвольно, а определив функцию Ф(*с1,с2* ) путем исключения *x, y, z* из уравнений

Ф1(*x, y, z*) = 0, Ф2 (*x, y, z*) = 0,,. (5.16)

В результате получим уравнение F(,) = 0, подставив в которое вместо *c1, c2* левые части соотношений (5.15), получим искомый интеграл

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.17) |

**Пример 3.** Определить зависящий от произвольной функции интеграл уравнения

Составляем вспомогательную систему уравнений

.

Её первые интегралы имеют вид

*x – y =* c1*, z – x =* c2.

Интеграл исходного уравнения

*Ф(x – y, z – x) = 0*,

где *Ф* - произвольная функция,

или в разрешенном относительно *z* виде

,

где - произвольная дифференцируемая функция.

**Пример 4.** Найти интегральную поверхность уравнения

,

проходящую через кривую *x = 0, z = y2*.

Интегрируем систему уравнений

откуда *z = c1, x2 + y2 = c2*. Исключая *x, y* и *z* из уравнений

*z = c1, x2 + y2 = c2*, *x = 0, z =y2*,

получаем *c1 = c2* , откуда *z = x2 + y2*.

**Пример 5.** Найти решение уравнения . Из всех решений выделить то, которое удовлетворяет условию *z(0, y) = y2* .

Из вспомогательного уравнения , находим характеристики

*x2 + y2 = c*.

Все решения исходного уравнения запишутся в виде

*z =Ф(x2 + y2),*

где *Ф* - произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Эта формула определяет поверхности вращения вокруг оси oz. Найдем ту из этих поверхностей, которая проходит через заданную параболу *z = y2*, лежащую в плоскости *x = 0*. Исключая *x* и *y* из уравнений

*x = 0, z = y2, x2 + y2 = c*,

получим *z = c*. Подставляя в это равенство *x2 + y2* вместо *c*, получим уравнение искомой поверхности z = x2 + y2 . Это уравнение определяет поверхность параболоида вращения вокруг oz.

**Пример 6.** Найти решения уравнения

удовлетворяющие начальному условию *u(x,y,z)|*y2+ z2= 2 =

Запишем уравнение характеристик . Находим два независимых первых интеграла

.

Из равенств:

исключаем переменные *x, y* и *z* преобразуя второе уравнение с учётом третьего и четвёртого

.

Таким образом, получаем

.

Подставляя в это равенство вместо *c1* и вместо *c2* , получим искомое решение

.

**Пример 7.** Найти решение *z(x, y)* задачи Коши

, *z|xy=1=*1.

Уравнения характеристик имеют вид

Из этих уравнений находим два первых интеграла

, ,

Исключая переменные *x, y* и *z* из уравнений:

, , *xy=*1*, z=*1*,*

получим *2 =* . После замены c1и c2 соответственно на и имеем

или *z2 =*2 *- xy*.

Последнее соотношение в области определяет два гладких решения исходного уравнения с частными производными . Одно из них, а именно является искомым решением задачи Коши.

**Пример 8.** Решить задачу Коши

, *z|y=-2x= y2*.

Найдем уравнение семейства характеристик , составив вспомогательное уравнение

и найдя его первые интегралы

*y2 - x2 =* c1, z=c2

Из равенств:

y=-2x; z=y2; y2-x2=c1; z=c2,

находим

,

Отсюда, в результате преобразований получаем

, , ,

и, наконец, окончательный результат

.

# Задачи для самостоятельного решения.

1. Проверить, являются ли решениями уравнения

в области *x* > 0, *y* > 0, *z* > 0 следующие функции *u = u(x, y, z)* :

1) , 2) *u=xuz*, 3) .

2. Доказать, что *u(x, y) = x + y + f (x, y)*, где *f (x, y)* - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, является решением дифференциального уравнения

3. Найти решения уравнения

Из всех решений выделить то, которое удовлетворяет условию

*u(0, y) = py2*.

4. Найти решение уравнения

которое удовлетворяет условию *u(x,1) = x*.

5. Найти решение задачи Коши

*, .*

6. Найти решение задачи Коши

, *u*(1,*y,z*)=*y2+z2*.

7. Найти решения задачи Коши

, *u(x,x)=x2*

8. Найти решение *u= u(x, y)* задачи Коши

, *u|xy=*1=1

9. Найти поверхность *u = u(x, y)*, удовлетворяющую уравнению

и проходящую через параболу *u = x - x2* , лежащую в плоскости

*y =* – 2.

10. Какой вид имеет система для характеристик квазилинейного уравнения

.

11. В каком виде может быть представлено в неявной форме общее решение *z(x, y)* уравнения

12. Вычислить в точке (-1;7) значение функции *z (x, y)*, являющейся решением задачи Коши

, *z|y=-2x*=*y2.*

## Контрольные вопросы

1. Какое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных?
2. Записать уравнение с частными производными первого порядка в общем виде.
3. Записать линейное уравнение с частными производными в общем виде.
4. В каком случае линейное уравнение с частными производными называется квазилинейным?
5. Записать квазилинейное уравнение с частными производными в общем виде.
6. В каком случае линейное уравнение с частными производными называется однородным?
7. Записать линейное однородное уравнение с частными производными в общем виде.
8. Записать характеристическую систему для линейного уравнения с частными производными.
9. В каком случае можно записать уравнение интегральной поверхности для линейного уравнения с частными производными.

# ГЛАВА 6. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ

# Теория устойчивости. Основные понятия

Для возможности математического описания какого-нибудь реального явления неизбежно приходится упрощать, идеализировать это явление, выделяя и учитывая, лишь наиболее существенные из влияющих на него факторов и отбрасывая остальные, менее существенные. При этом неизбежно встает вопрос о том, удачно ли выбраны упрощающие предположения. Возможно, что неучтенные факторы сильно влияют на изучаемое явление, значительно меняя его количественные или даже качественные характеристики. В конечном счете этот вопрос решается практикой - соответствием полученных выводов с опытными данными, но все же во многих случаях можно указать условия, при которых некоторые упрощения заведомо невозможны.

Если некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| , *i*=1,2,…,*n* | (6.1) |

с начальными условиями , которые обычно явля-ются результатами измерений и, следовательно, неизбежно получены с некоторой погрешностью, то естественно возникает вопрос о влиянии малого изменения начальных значений на искомое решение.

Если окажется, что сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то решение, определяемое выбранными нами неточными начальными данными, обычно не имеет никакого прикладного значения и даже приближенно не может описывать, изучаемое явление.

Следовательно, возникает важный для приложений вопрос о нахождении условий, при которых достаточно малое изменение начальных значений вызывает сколь угодно малое изменение решения.

Если *t* изменяется на конечном отрезке , то ответ на этот вопрос дает теорема о непрерывной зависимости решений от начальных значений. Если же *t* может принимать сколь угодно большие значения, то этим вопросом занимается теория устойчивости.

Решение системы (6.1) называется устойчивым, или, точнее, **устойчивым по Ляпунову**, если для любого можно подобрать такое, что для всякого решения той же системы, начальные значения которого удовлетворяют неравенствам

для всех справедливы неравенства

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.2) |

т. е. близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех .

***Замечание***. Если система (6.1) удовлетворяет условиям теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных значений, то в определении устойчивости вместо можно писать , так как в силу этой теоремы на отрезке решения остаются близкими при достаточно близких начальных значениях.

Если при сколь угодно малом хотя бы для одного решения неравенства (6.2) не выполняются, то решение называется **неустойчивым**. Неустойчивые решения лишь в редких случаях представляют интерес в практических задачах.

Если решение не только устойчиво, но, кроме того,

удовлетворяет условию

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.3) |

если то решение называется **асимптотически устойчивым**.

Заметим, что из одного условия (6.3) еще не следует устойчивость решения

**Пример 1.** Исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения определяемое начальным условием

Решение асимптотически устойчиво, так как

при , если и **(это**

**Пример 2.** Исследовать на устойчивость решение уравнения

, определяемое начальным условием

Решение неустойчиво, так как нельзя подобрать столь малое , чтобы из неравенства следовало бы

или

при всех .

Исследование на устойчивость некоторого решения

системы уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| , | (6.4) |

может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения — точки покоя, расположенной в начале координат.

Действительно, преобразуем систему уравнений (6.4) к новым переменным, полагая

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.5) |

Новыми неизвестными функциями являются отклонения прежних неизвестных функций, от функций , определяющих исследуемое на устойчивость решение.

В силу (24) в новых переменных система (21) принимает вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.6) |

Очевидно, что исследуемому на устойчивость решению системы (6.1), в силу зависимости , соответствует тривиальное решение системы (6.6), причем исследование на устойчивость решения системы (6.1) может быть заменено исследованием на устойчивость тривиального решения системы (6.5). Поэтому в дальнейшем без ограничения общности можно считать, что на устойчивость исследуется тривиальное решение или, что одно и то же, расположенная в начале координат точка покоя системы уравнений.

Сформулируем условия устойчивости в применении к точке покоя .

Точка покоя системы (6.5) устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого можно подобрать такое, что из неравенства

следует

, при

Или несколько иначе: точка покоя устойчива в смысле Ляпунова, если для каждого можно подобрать такое, что из неравенства

следует

при аектория, начальная точка которой находится в -окрестности начала координат при не выходит за пределы -окрестности начала координат.

# Второй метод А. М. Ляпунова

Выдающийся русский математик Александр Михайлович Ляпунов в конце XIX века разработал весьма общий метод исследования на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| *,* | (6.7) |

получивший название **второго метода Ляпунова**

***Теорема 4.1* *(теорема Ляпунова об устойчивости).*** *Если существует дифференцируемая функция , называемая функцией Ляпунова, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

1) *, причем лишь при , т. е. функция имеет строгий минимум в начале координат;*

2) *при , то точка покоя устойчива.*

Производная в условии 2) взята вдоль интегральной кривой, т.е. она вычислена в предположении, что аргументы функции заменены решением системы дифференциальных уравнений (6.7).

Действительно, в этом предположении или заменяя правыми частями системы (6.7), окончательно получим

*Доказательство теоремы Ляпунова об устойчивости.* В окрестности начала координат, как и в окрестности всякой точки строгого минимума (рис. 6.1), поверхности уровня функции являются замкнутыми поверхностями, внутри которых находится точка минимума — начало координат. Зададим . При достаточно малом поверхность уровня целиком лежит в -окрестности начала координат, но не проходит через начало координат, следовательно, можно выбрать такое, что -окрестность начала координат целиком лежит внутри поверхности , причем в этой окрестности .

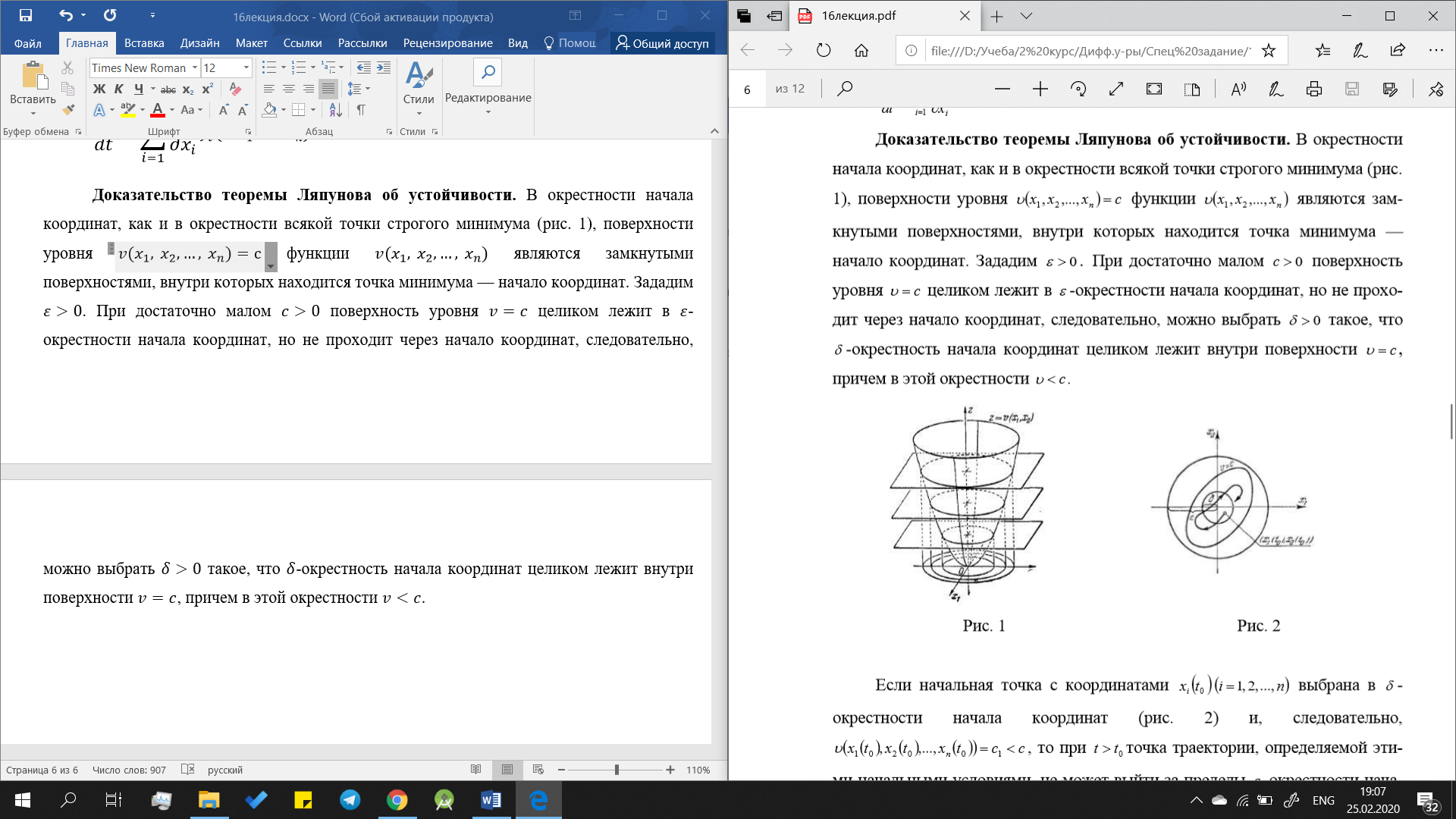


Рис 6.1 Рис 6.2

Если начальная точка с координатами выбрана в -окрестности начала координат (рис. 6.2) и, следовательно, , то при точка траектории, определяемой этими начальными условиями, не может выйти за пределы -окрестности начала координат и даже за пределы поверхности уровня , так как, в силу условия 2) теоремы, функция вдоль траектории не возрастает и, следовательно, при

.

**Замечание.** А. М. Ляпунов доказал теорему об устойчивости в более общих предположениях, в частности, он считал, что функция может зависеть и от . При этом для справедливости теоремы об устойчивости первое условие надо заменить следующим

>0.

в окрестности начала координат при , где непрерывная функция имеет строгий минимум в начале координат, =0, а второе условие остается прежним , но только в этом случае

Схема доказательства остается прежней, надо только принять во внимание, что, в силу условия 1), подвижная при изменяющемся *t* поверхность уровня остается при всех изменениях внутри поверхности уровня (рис. 6.3).

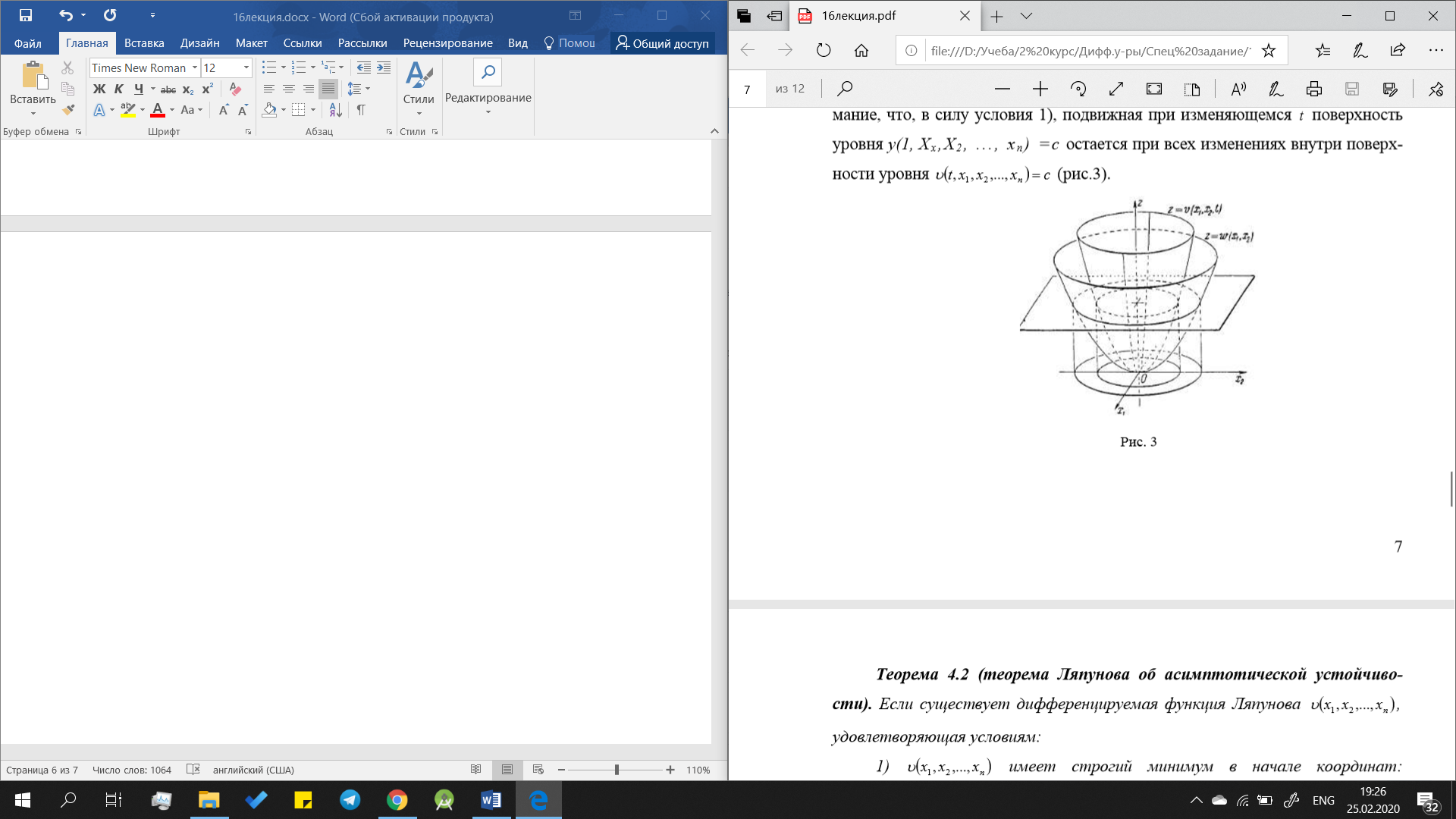


Рис. 6.3

***Теорема 4.2 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости).*** *Если существует дифференцируемая функция Ляпунова , удовлетворяющая условиям:*

1. *имеет строгий минимум в начале координат: ;*
2. *производная, функции , вычисленная вдоль интегральных кривых системы* (6.7)

*, причем вне сколь угодно малой окрестности начала координат, т. е. при производная , где - постоянная, то точка покоя системы* (6.7) *асимптотически устойчива.*

*Доказательство.* Так как условия теоремы об устойчивости выполнены, то для каждого можно подобрать такое, что траектория, начальная точка которой находится в -окрестности начала координат, при не выходит за пределы -окрестности начала координат. Следовательно, в частности, вдоль такой траектории при выполнено условие 2), поэтому вдоль траектории функция монотонно убывает с возрастанием *t*, и вдоль траектории существует предел функции при :

Надо доказать, что , так как если , то из условия 1) следует, что , т. е. точка покоя асимптотически устойчива. Допустим, что ; тогда траектория при находится в области , следовательно, вне некоторой -окрестности начала координат, т.е. там, где по условию 2) при . Умножая неравенство на и интегрируя вдоль траектории в пределах от до *t*, получим:

,

или

,

При достаточно большом *t* правая часть отрицательна, а следовательно, и , что противоречит условию 1).

**Замечание**. Теорема об асимптотической устойчивости обобщается на случай функции , зависящей от , если первое условие, как и в предыдущей теореме, заменить следующим:

***Теорема 4.3 (теорема Четаева о неустойчивости).*** *Если существует дифференцируемая функция , удовлетворяющая в некоторой замкнутой h-окрестности начала координат условиям: 1) в сколь угодно малой окрестности U начала координат существует область ( ), в которой , причем на лежащей в U части границы области ( ); 2) в области ( ) производная*

*.*

*причем в области (), , производная , то точка покоя системы* (6.7) *неустойчива.*

*Доказательство.* Начальную точку возьмем в сколь угодно малой окрестности начала координат в области (), (рис. 4). Так как вдоль траектории , то функция вдоль траектории не убывает, и следовательно, пока траектория не покинет рассматриваемую h-окрестность начала координат, где выполнены условия теоремы, траектория должна находиться в области ( ). Допустим, что траектория не покидает h-окрестности начала координат. Тогда в силу условия 2) вдоль траектории при производная

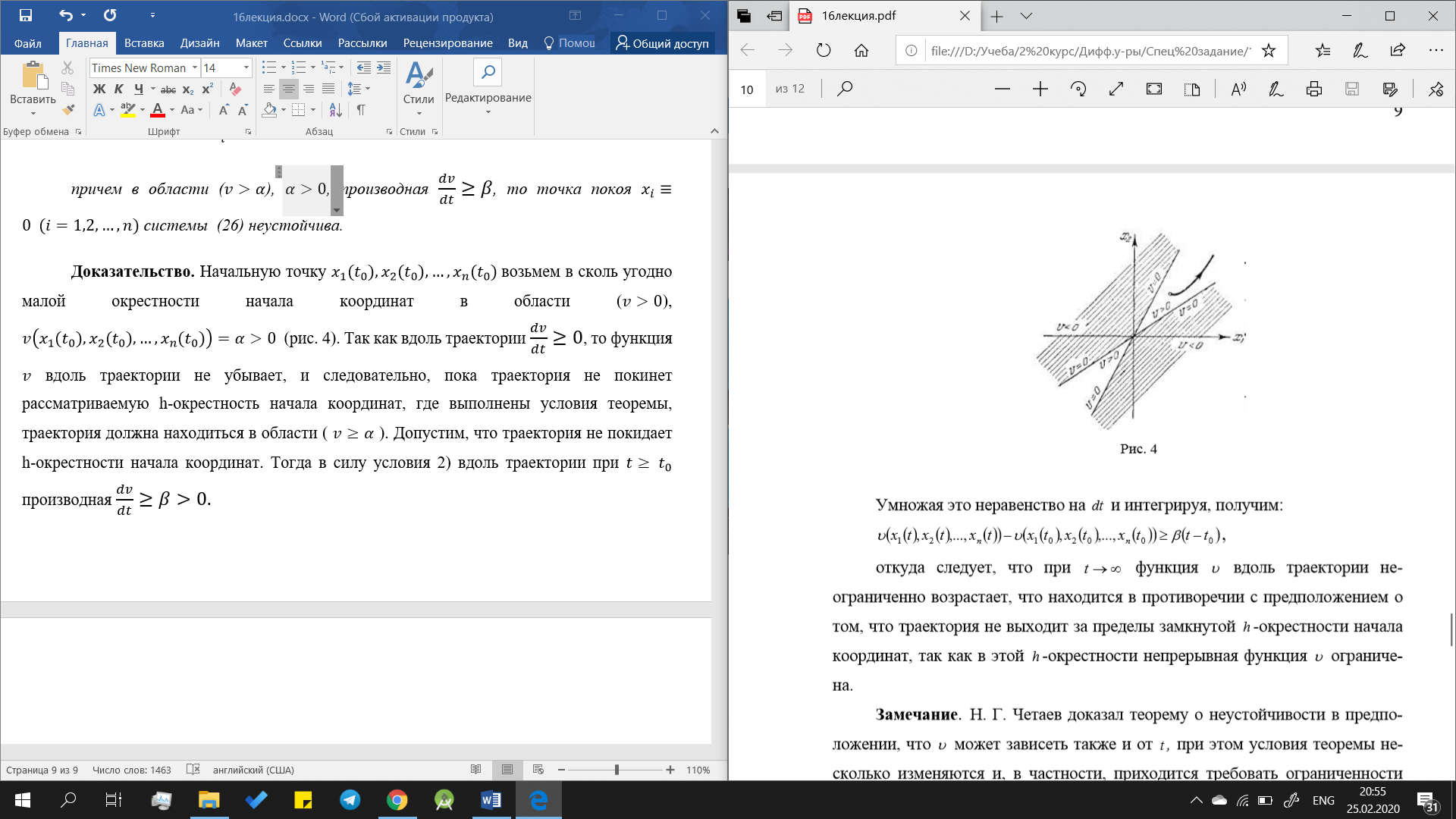


Рис. 6.4

Умножая это неравенство на *dt* и интегрируя, получим:

,

откуда следует, что при функция вдоль траектории неограниченно возрастает, что находится в противоречии с предположением о том, что траектория не выходит за пределы замкнутой h-окрестности начала координат, так как в этой h-окрестности непрерывная функция ограничена.

**Замечание.** Н. Г. Четаев доказал теорему о неустойчивости в предположении, что может зависеть также и от *t*, при этом условия теоремы несколько изменяются и, в частности, приходится требовать ограниченности функции в области ( ) в рассматриваемой *h*-окрестности начала координат.

**Пример 1**. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:

Функция удовлетворяет условиям теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости:

1. Вне окрестности начала координат . Следовательно, решение системы асимптотически устойчиво.

**Пример 2**. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:

Функция удовлетворяет условиям теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости:

1)

2) .

Следовательно, тривиальное решение устойчиво.

**Пример 3**. Исследовать на устойчивость точку покоя системы уравнений

Функция удовлетворяет условиям теоремы Н. Г. Четаева:

1. , при ;
2. при , причем при

*.* Следовательно, точка покоя неустойчива.

**Пример 4.** Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы уравнений

если дано, что функция имеет строгий максимум в начале координат.

В качестве функции Ляпунова возьмем разность

которая, очевидно, обращается в нуль при , имеет строгий минимум в начале координат и, следовательно, удовлетворяет условию 1) теоремы Ляпунова об устойчивости. Производная вдоль интегральных кривых

Итак, условия теоремы Ляпунова об устойчивости выполнены, следовательно, тривиальное решение устойчиво.

**Пример 5.** Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы уравнений

, где при и все .

Тривиальное решение устойчиво, так как функция удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости:

# Задачи для самостоятельного исследования.

Исследовать устойчивость тривиального решения, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова и Четаева.

# Исследование на устойчивость по первому приближению

При исследовании на устойчивость точки покоя системы дифференциальных уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| *,* | (6.8) |

где -дифференцируемые в окрестности начала координат функции, часто применяется следующий метод: пользуясь дифференцируемостью функций , представляют систему (6.8) в окрестности начала координат в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.9) |

где имеют порядок выше первого относительно , и вместо

точки покоя *системы* (6.9) *исследуют на устойчивость ту же точку покоя линейной системы*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.10) |

называемой системой уравнений первого приближения для системы (6.9). Условия применимости этого метода, которым долгое время пользовались без всякого обоснования, были детально исследованы А.М. Ляпуновым и в дальнейшем расширены трудами многих других математиков, среди которых следует в первую очередь отметить работы О. Перрона, И.Г. Малкина, К.П. Персидского, Н.Г. Четаева.

Исследование на устойчивость системы уравнений первого приближения, конечно, является задачей значительно более легкой, чем исследование исходной, вообще говоря, нелинейной системы, однако даже исследование линейной системы (6.10) при переменных коэффициентах является задачей весьма сложной. Если же все a постоянны, т.е. система стационарна в первом приближении, то исследование на устойчивость линейной системы (6.10) не представляет принципиальных затруднений.

***Теорема 4.4*** *Если система уравнений* (6.9) *стационарна в первом приближении, все члены в достаточно малой окрестности начала координат при , удовлетворяют неравенствам , где N и - постоянные, причем*

*(т.е. если не зависят от t), и их порядок () выше первого относительно*

*и все корни характеристического уравнения*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.11) |

*имеют отрицательные действительные части, то тривиальные решения*  *системы уравнений* (6.10) *и системы уравнений* (6.9) *асимптотически устойчивы, следовательно, в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.*

***Теорема 4.5.*** *Если система уравнений* (6.9) *стационарна в первом приближении, все функции удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, и хотя бы один корень характеристического уравнения* (6.11) *имеет положительную действительную часть, то точки покоя*  *системы* (6.9) *и системы* (28) *неустойчивы, следовательно, и в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.*

Теоремы 4.4 и 4.5 в отношении ограничений, налагаемых на корни характеристического уравнения, не охватывают лишь так называемый критический случай: все действительные части корней характеристического уравнения неположительные, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю.

В критическом случае на устойчивость тривиального решения системы (6.9) начинают влиять нелинейные члены и исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно.

Доказательство теорем 4.4 и 4.5 можно найти в книге И. Г. Малкина [8].

Для того чтобы дать представление о методах доказательства таких теорем, мы приведем доказательство теоремы 4.4 в предположении, что все корни характеристического уравнения действительны и различны

при .

В векторных обозначениях система (6.9) и система (6.10) примут соответственно вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.12) |
|  | (6.13) |

где

*, ,*

С помощью невырожденного линейного преобразования с постоянными коэффициентами где

*,*

преобразуем систему (6.13) к виду или . Подберем матрицу *B* так, чтобы матрица была диагональной:

При этом система (6.10) преобразуется в

а система (6.9) при том же преобразовании переходит в

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.14) |

где . постоянная величина,

Для системы (6.14) функцией Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы об асимптотической устойчивости, является

.

Действительно,

при достаточно малых , так как все , а удвоенная сумма при достаточно малых может быть сделана по модулю меньше суммы

Наконец, вне окрестности начала координат

**Пример 1.** Исследовать на устойчивость точку покоя системы

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.15) |

Нелинейные члены удовлетворяют условиям теорем 4.4 и 4.5. Исследуем на устойчивость точку покоя системы первого приближения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.16) |

Характеристическое уравнение имеет корни , следовательно, в силу теоремы 4.5 точка покоя систем (6.15) и (6.16) неустойчива.

**Пример 2.** Исследовать на устойчивость точку покоя системы

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.17) |

Разлагая по формуле Тейлора, представляем систему в виде

где удовлетворяют условиям теорем 4.4 и 4.5.

Характеристическое уравнение для системы первого приближения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.18) |

имеет корни с отрицательными действительными частями. Следовательно, точка покоя систем (6.17) и (6.18) асимптотически устойчива.

**Пример 3.** Исследовать на устойчивость точку покоя системы

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.19) |

Характеристическое уравнение для системы первого приближения имеет чисто мнимые корни – критический случай. Исследование по первому приближению невозможно, так как действительные части корней характеристического уравнения равны 0. В данном случае легко подбирается функция Ляпунова

1. , причем вне некоторой окрестности начала координат , следовательно, точка покоя по теореме предыдущего параграфа асимптотически устойчива.

**Задачи для самостоятельного исследования.**

Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение следующих систем:

## Контрольные вопросы

1. Каким основным вопросом занимается теория устойчивости?
2. Какое решение системы дифференциальных уравнений называется устойчивым по Ляпунову?
3. Какое решение системы дифференциальных уравнений называется неустойчивым?
4. Какое решение системы дифференциальных уравнений называется асимптотически устойчивым?
5. Записать условия, при которых решение системы дифференциальных уравнений называется устойчивым по Ляпунову.
6. Записать условия, при которых решение системы дифференциальных уравнений называется асимптотически устойчивым.
7. В чем заключается второй метод А.М. Ляпунова исследования на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений?
8. Сформулировать теорему А.М. Ляпунова об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений.
9. Что значит исследование на устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений?
10. Сформулировать теорему А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений.
11. Сформулировать теорему Н.Г. Четаева о неустойчивости решений систем дифференциальных уравнений
12. Какая система называется системой уравнений первого приближения для системы дифференциальных уравнений.
13. Какая система называется стационарной в первом приближении.
14. Сформулировать условия, при которых решение системы дифференциальных уравнений неустойчиво по первому приближению.
15. Сформулировать условия, при которых решение системы дифференциальных уравнений асимптотически устойчиво по первому приближению.
16. Когда невозможно исследовать решение системы дифференциальных уравнений по первому приближению?
17. Записать в общем виде характеристическое уравнениедля системы уравнений стационарной в первом приближении.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Битнер,Г.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие для студ. вузов/ Г.Г. Битнер. - Ростов-н/Д: Феникс, 2012.- 205с.
2. Демидович,Б.П. и др. Дифференциальные уравнения: учебное пособие/ Б.П.Демидович, В. П. Моденов. - С-Петербург: Лань, 2008, - 288с.
3. Агафонов С.А., Муратова Т.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студ.вузов. –М.; Академия, 2008.
4. Филиппов,А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - Ижевск, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
5. Тихонов,А.Н и др. Дифференциальные уравнении: учебник, 4-е изд./А.Н.Тихонов, А.Б. Васильев, А.Г. Свешников.; - М., Физматлит, 2005.
6. Л.Э. Эльсгольц. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник. - С-Петербург, Лань, 2003
7. Н.М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - С-Петербург: Лань, 2003.
8. И.Г. Малкин. Теория устойчивости движения. –М., Наука, 1966.